14. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei Φ eine beliebige aussagenlogische Formel in konjuktiver Normalform, so dass jede Klausel von Φ höchstens 3 Literale enthält ($\Phi \in$ 3-SAT). Ferner sei m die maximale Anzahl gleichzeitig erfüllbarer Klauseln von Φ. Entwickeln Sie einen polynomialen Algorithmus A, der eine Belegung der Variablen von Φ konstruiert, so dass mindestens $\frac{m}{2}$ Klauseln erfüllt sind (d.h. $R_A = 2$ für das Problem MAX-3-SAT).

Aufgabe 2. Es sei eine Menge $S := \{1, 2, ..., 10\}$ gegeben, desweiteren seien $c_1 = c_3 = c_5 = 2$, $c_2 = 1$, $c_4 = c_8 = c_{10} = 5$, $c_6 = 3$, $c_7 = 7$, $c_9 = 4$ und $B = 9$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Heuristiken
i) Next-Fit,
ii) First-Fit und
iii) First-Fit-Decreasing
jeweils eine zulässige Lösung für das Bin-Packing-Problem.
Ist eine der Lösungen optimal?

Aufgabe 3. Es sei S eine endliche Menge mit n Elementen, c_s, $a_s \in \mathbb{N}$ für alle $s \in S$ und $B \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen.
Fractional Knapsack: Finde ratinale Zahlen $x_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq n$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B \text{ gilt und } \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \text{ maximal wird.}$$

Angenommen, die Elemente c_i und a_i sind so geordnet, dass

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq ... \geq \frac{c_n}{a_n}$$

gilt, ausserdem sei $k^* := \min\{j \mid \sum_{i=1}^{j} a_i > B\}$ und

$$x_i^* = \begin{cases} 1 & i < k^* \\ \frac{B - \sum_{i=1}^{k-1} a_i}{a_k} & i = k^* \\ 0 & i > k^* \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass $x^* := (x_1^*, ..., x_n^*)$ ein optimaler Punkt ist.
ii) Geben Sie einen polynomiellen Algorithmus an, der das *Fractional Knapsack*-Problem löst.

Aufgabe 4. Finden Sie mit Hilfe des Edmonds-Matching-Algorithmus ein maximales Matching in dem folgenden Graphen.