13. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \leq |V|$ eine natürliche Zahl.
Clique: Enthält G eine Clique der Kardinalität k, d.h. einen vollständigen Untergraphen mit k Ecken?
Independent Set: Enthält G eine unabhängige Eckenmenge der Grösse k, d.h. existiert eine Teilmenge $W \subseteq V$ der Kardinalität k, so dass die Ecken in W paarweise nicht adjazent in G sind?
Vertex Cover: Enthält G eine Eckenüberdeckung der Grösse k?
Zeigen Sie die **NP**-Vollständigkeit von
i) *Clique*,
ii) *Independent Set*,
iii) *Vertex Cover*.
Hinweis zu i): Benutzen Sie eine Reduktion von *3-Dimensional Matching* auf *Clique*.

Aufgabe 2. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.
3-*Colouring*: Ist G 3-färbbar, d.h. existiert eine Abbildung $c : V \to \{1, 2, 3\}$, so dass $c(u) \neq c(v)$ für alle adjazenten Ecken u, v?
Zeigen Sie, dass 3-*Colouring* **NP**-vollständig ist.
Hinweis: Konstruieren Sie eine Reduktion von 3-SAT auf 3-*Colouring*.

Aufgabe 3. Beweisen Sie den folgenden Satz von Sahni und Gonzalez. Falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ ist, so gibt es für kein $\epsilon > 0$ einen ϵ-approximativen, polynomialen Algorithmus für das Traveling-Salesman-Problem.
Hinweis: Führen Sie die gegenteilige Annahme mit Hilfe von *Hamilton Circuit* zu einem Widerspruch.