# 9. Übung Optimierung B

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie den Satz von Radon:
Es sei $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $k \geq n+2$ Elementen. Dann gibt es eine Zerlegung von $A$ in zwei disjunkte Teilmengen $A_1$ und $A_2$, sodass $\operatorname{conv}(A_1) \cap \operatorname{conv}(A_2) \neq \emptyset$ gilt.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie den Satz von Helly:
Seien $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich viele konvexe Mengen. Haben je $n+1$ dieser Mengen nichtleeren Durchschnitt, so haben alle diese Mengen einen nichtleeren Durchschnitt.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Radon.

**Aufgabe 3.**
Gegeben sei das folgende System von linearen (Un-)Gleichungen

$$\begin{cases} \xi^T a_i < 0, & i = 1, \dots, m_a, \quad m_a \geq 1, \\ \xi^T b_j \leq 0, & j = 1, \dots, m_b, \\ \xi^T c_k = 0, & k = 1, \dots, m_c, \end{cases} \qquad (*)$$

mit $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass genau eine der beiden Möglichkeiten zutrifft:

(i) Das System $(*)$ ist lösbar.

(ii) Es existieren $u_i \geq 0$, nicht alle Null, $v_j \geq 0$ und $w_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{i=1}^{m_a} u_i a_i + \sum_{j=1}^{m_b} v_j b_j + \sum_{k=1}^{m_c} w_k c_k = 0$$

gilt.

Zeigen Sie weiter, dass im Fall von (ii) die Gleichung mit höchstens $n+1$ von Null verschiedenen $u_i, v_j, w_k$ erfüllt werden kann.

**Aufgabe 4.** Es sei $D = (V, A)$ ein Digraph und $T := (V, A')$ ein gerichteter Baum. Dann sei $C$ die folgende $|A'| \times |A|$-Matrix:
Für alle $a' \in A'$ und $a = (u, v) \in A$ ist

$$c_{a',a} = \begin{cases} +1, & \text{falls auf einem ungerichteten}(u-v)\text{-Weg in } T \text{ die Kante } a' \text{ vorwärts benutzt wird} \\ -1, & \text{falls auf einem ungerichteten}(u-v)\text{-Weg in } T \text{ die Kante } a' \text{ rückwärts benutzt wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

$C$ heißt *Netzwerkmatrix*.
Zeigen Sie, $C$ ist vollständig unimodular.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass jede Untermatrix einer Netzwerkmatrix selbst wieder eine Netzwerkmatrix ist.