8. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Aus der Vorlesung ist bekannt:
Es sei $D = (V, A)$ ein Netzwerk und $u, v \in V$ seien zwei verschiedene Ecken von D, die nicht durch einen Bogen (u, v) verbunden sind. Dann ist die maximale Anzahl p von eckendisjunkten $(u-v)$-Wegen gleich der minimalen Anzahl q von Ecken, deren Herausnahme aus D alle $(u-v)$-Wege zerstört.
Formulieren und beweisen Sie die 'ungerichtete Version'.

Aufgabe 2. Auf der Menge $\mathcal{P}_n := \{(p_1, \ldots, p_n) \mid p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n \geq 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1\}$ sei die folgende Ordnungsrelation gegeben:

$$p \preceq q \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{k} p_i \leq \sum_{i=1}^{k} q_i \text{ für alle } 1 \leq k \leq n-1.$$

Zeigen Sie:

$$p \preceq q \Leftrightarrow \text{ Es existiert eine doppeltstochastische Matrix } M \text{ mit } Mq = p.$$

Hinweis:
Zeigen Sie die Existenz einer gewünschten Matrix per vollständigen Induktion nach der Zahl der i mit $p_i \neq q_i$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie den folgenden Satz von Havel und Hakimi:
Eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ ist genau dann Gradsequenz eines Graphen, wenn die Folge $d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_{d_n} - 1, d_{d_n+1}, d_{d_n+2}, \ldots, d_{n-1}$ Gradsequenz eines Graphen ist.

Aufgabe 4. Ein *Multigraph* ist ein Graph, in dem mehrfache (d.h. parallele) Kanten zwischen Eckenpaaren zugelassen sind. Zeigen Sie:
Eine Folge $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$ ganzer Zahlen ist genau dann durch einen Multigraphen realisierbar, wenn die Summe $\sum_{i=1}^{n} d_i$ gerade ist und $d_1 \leq d_2 + d_3 + \ldots + d_n$ gilt.
Hinweis: Beweisen Sie die Aufgabe mit vollständiger Induktion nach $|V(G)|$ und unterscheiden Sie für $|V(G)| \geq 4$ die Fälle $d_1 - d_2 = 0$, $d_1 - d_2 \geq d_n$ und $0 < d_1 - d_2 < d_n$.

Doppeltstochastische Matrix:

Eine $n \times n$ Matrix $P = (p_{ij})_{0 \leq i,j < n}$ heißt stochastisch, falls alle Einträge p_{ij} nichtnegativ und alle Zeilensummen gleich Eins sind:

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } i = 0, ..., n-1.$$

Sind zusätzlich auch alle Spaltensummen gleich 1, also

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } j = 0, ..., n-1,$$

so nennt man P doppeltstochastisch.