

7. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgende Aussage: Der Dijkstra Algorithmus (siehe nächste Seite), durchgeführt am Graphen $D = (V, A)$ mit ausgezeichnete Ecke s , liefert zu jeder Ecke $v \in V$ die Länge $\text{dist}(v)$ eines kürzesten gerichteten $(s - v)$ -Weges ($\text{dist}(v) = \infty$ bedeutet, dass kein solcher Weg existiert). Der Digraph $F := (V', A')$ mit

$$V' := \{v \in V \mid \text{dist}(v) < \infty\} \text{ und } A' := \{(\text{pred}(v), v) \mid v \in V' \setminus \{s\}\}$$

hat die folgenden Eigenschaften:

1. $A' \subseteq A$.
2. F ist ein Baum.
3. Für jede Ecke $v \in V' \setminus \{s\}$ gibt es genau einen gerichteten $(s - v)$ -Weg in F . Dies ist gleichzeitig ein kürzester $(s - v)$ -Weg in D .

Aufgabe 2. Beweisen Sie den Satz von Dilworth ohne den Satz von König direkt per Induktion nach $|P|$.

Hinweis: Zeigen Sie nur die nicht-triviale Ungleichung. Für den Induktionsschritt untersuchen Sie die folgenden zwei Fälle:

1. Es gibt eine Antikette L maximaler Kardinalität, die weder alle maximalen noch alle minimalen Elemente von P enthält. In diesem Fall seien

$$I = L \cup \{p \in P \mid \text{es existiert ein } q \in L \text{ mit } p \prec q\}$$

$$F = L \cup \{p \in P \mid \text{es existiert ein } q \in L \text{ mit } q \prec p\} = L \cup (P - I).$$

Wenden Sie dann die Induktionsvoraussetzung auf I und F an.

2. Die einzigen Kandidaten für eine maximale Antikette in P sind die Mengen aller maximalen bzw. minimalen Elemente von P . Wählen Sie $p, q \in P$ so, dass p minimal und q maximal in P und $p \prec q$ ist und wenden Sie die Induktionsvoraussetzung dann auf $P - \{p, q\}$ an.

Aufgabe 3. i) Angenommen, es sind $N = nm + 1$ verschiedene Zahlen a_0, a_1, \dots, a_{N-1} von links nach rechts an eine Tafel geschrieben. Zeigen Sie, dass einige Zahlen so weggewischt werden können, dass

- entweder $n + 1$ Zahlen $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ mit $i_0 < i_1 < \dots < i_n$ und $a_{i_0} < a_{i_1} < \dots < a_{i_n}$
 - oder $m + 1$ Zahlen $a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_m}$ mit $j_0 < j_1 < \dots < j_m$ und $a_{j_0} > a_{j_1} > \dots > a_{j_m}$
- übrigbleiben.

ii) Angenommen, es sind $N = nm + 1$ (offene) Intervalle auf \mathbb{R} gegeben. Zeigen Sie: Es gibt entweder $n + 1$ Intervalle mit einem gemeinsamen Punkt oder $m + 1$ paarweise disjunkte Intervalle.

Hinweis: Wenden Sie dann den Satz von Dilworth an.

Aufgabe 4. Zeigen Sie den Satz von Sperner:

Die Mächtigkeit einer größten Antikette von Teilmengen einer n -Menge ist

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Info: Dijkstra-Algorithmus

Eingabe: Ein Digraph $D := (V, A)$ mit einer ausgezeichneten Ecke $s \in V$ und einer Längenfunktion $l : A \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Schritt 1: Setze $\text{dist}(s) := 0$, $\text{dist}(v) = l(a)$ für $a = (s, v) \in A$ und $\text{dist}(v) = \infty$ für $(s, v) \notin A$. Außerdem definiere $T := V \setminus \{s\}$ und $\text{pred}(v) := s$ für $v \in T$.

Schritt 2: Sei $U := \{u \in T \mid \text{dist}(u) \leq \text{dist}(v) \text{ für alle } v \in T\}$, setze dann $T := T \setminus U$.

Schritt 3: Für jedes $u \in U$ und für alle Bögen $a = (u, v) \in A$ mit $v \in T$ überprüfe man, ob $\text{dist}(v) > \text{dist}(u) + l(a)$. Falls ja, so setze man $\text{dist}(v) := \text{dist}(u) + l(a)$ und $\text{pred}(v) := u$.

Schritt 4: Falls $T = \emptyset$: STOP. Anderenfalls gehe man zu Schritt 2.