5. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $A_G \neq \emptyset$ (alle Bezeichnungen sind wie im Gallai-Edmonds-Struktursatz gewählt). Der bipartite Graph $H = (U \cup W, F)$ sei wie folgt definiert: $U = A_G$, die Knoten in W entsprechen bijektiv den Komponenten von $G[D_G]$ und $uw \in F$ genau dann, wenn $u \in U = A_G$ mit der w entsprechenden Komponente in G verbunden ist. Zeigen Sie, dass dann $|\Gamma_H(S)| > |S|$ für alle $S \subseteq U$, $S \neq \emptyset$ gilt.

Aufgabe 2. Der Graph $G = (V, E)$ sei ν-saturiert, d.h. es gilt $\nu(G + e) > \nu(G)$ für jede Kante $e \in \binom{V}{2} \setminus E$. Beschreiben Sie möglichst genau die Struktur von G.
Hinweis: Verwenden Sie den Gallai-Edmonds-Struktursatz.

Aufgabe 3. Es sei $G = (V, E)$ ein k-regulärer Graph auf $2m = |V|$ Knoten, so dass für jeweils zwei ungerade Kreise in G gilt, entweder sie schneiden sich oder es existiert eine Kante, die die beiden Kreise verbindet.
Zeigen Sie, G besitzt ein perfektes Matching.

Aufgabe 4. Sei ein 2-fach kantenzusammenhängender Graph $G = (V, E)$ gegeben. Zeigen Sie:
G kann wie folgt „zusammengesetzt“ werden: $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_r$, wobei G_1 ein Kreis ist. Weiter ist G_{i+1} entweder ein Weg, der genau nur seine Endecken mit $G_1 \cup \ldots \cup G_i$ gemeinsam hat, oder ein Kreis, der genau einen Punkt mit $G_1 \cup \ldots \cup G_i$ gemeinsam hat.
Hinweis: Wähle einen Teilgraphen $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_i$ und zeigen Sie: Wenn $G \neq G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_i$, dann gibt es ein G_{i+1}.