4. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. In einer Werbeagentur mit 5 Angestellten sind 5 Aufträge zu erledigen. Die Qualifikation des Mitarbeiters i für den Auftrag j sei durch die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

beschrieben (1: sehr gut ... 5: miserabel). Legen Sie zuerst Matrix A zugrunde und weisen Sie jedem Mitarbeiter genau einen Auftrag zu, so dass die Summe der Qualifikationskoeffizienten möglichst klein wird. Legen Sie dann Matrix B zugrunde und weisen Sie jedem Mitarbeiter genau einen Auftrag zu, so dass die Summe der Qualifikationskoeffizienten möglichst groß wird.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgende Aussage (Memdelsohn-Dulmage):
Sei $G = (U \cup V, E)$ ein bipartiter Graph und seien M_1 und M_2 Matchings in G. Dann gibt es ein Matching $M \subset M_1 \cup M_2$ in G, das alle Ecken aus U überdeckt, die von M_1 überdeckt werden, und das alle Ecken aus V überdeckt, die von M_2 überdeckt werden.

Aufgabe 3.
Es sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Ferner seien durch $U, Ug_1, Ug_2, \ldots, Ug_k$ und $U, h_1U, h_2U, \ldots, h_kU$ die Recht- bzw. Linksnebenklassen der Gruppe G nach U gegeben. Zeigen Sie, dass ein gemeinsames Repräsentantensystem für die Rechts- und Linksnebenklassen existiert (d.h. eine Teilmenge $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ von G, so dass $\{Ua_0, Ua_1, \ldots, Ua_k\} = \{U, Ug_1, Ug_2, \ldots, Ug_k\}$ und $\{a_0U, a_1U, \ldots, a_kU\} = \{U, h_1U, h_2U, \ldots, h_kU\}$).
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Hall auf einen geeigneten bipartiten Graphen an.

Aufgabe 4. Sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben.
(a) Sei $\mathcal{U}$ die Menge aller Teilmengen $U \subseteq V$, so dass ein Matching M mit maximaler Kantenzahl in G existiert, das keinen Knoten in U überdeckt. Zeigen Sie, dass $(V,\mathcal{U})$ ein Matroid ist.
(b) Sei $\mathcal{W}$ die Menge aller Teilmengen $W \subseteq V$, so dass ein Matching M in G existiert, das W überdeckt. Zeigen Sie, dass $(V, \mathcal{W})$ ein Matroid ist.

Info: Ein Matroid über einer Menge E ist ein Paar $M = (E,\mathcal{U})$ mit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(E)$, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\emptyset \in \mathcal{U}$,
2. $A \subset B, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U}$,
3. $A, B \in \mathcal{U}$ und $|A| < |B| \Rightarrow \exists x \in B \setminus A$ mit $A \cup \{x\} \in \mathcal{U}$,
4. $\exists n \in \mathbb{N}_0$ mit $|A| \leq n$ für alle $A \in \mathcal{U}$.

Die dritte Bedingung wird oft auch als Austauscheigenschaft oder Austauschaxiom bezeichnet.