3. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W. In G sei die Hall-Bedingung erfüllt und für jedes $u \in U$ gelte $d(u) = |\Gamma(u)| \geq r > 0$. Zeigen Sie als quantitative Verallgemeinerung des Satzes von Hall: Im Fall $r \leq |U|$ gibt es in G mindestens $r!$ verschiedene Matchings der Größe $|U|$ und im Fall $r > |U|$ mindestens $\frac{r!}{(r-|U|)!}$ solcher Matchings.

Hinweis: Induktion nach $|U|$. Eine Teilmenge A von U heißt kritisch, falls $|A| = |\Gamma(A)|$. Wenn es keine von $\emptyset$ und U verschiedene kritische Teilmenge von U gibt, so wählen Sie für ein $\hat{u} \in U$ einen beliebigen Matchingpartner $\hat{w} \in W$ aus. Was gilt dann für $G' := G \setminus \{\hat{u}, \hat{w}\}$? Ist $A_0 \subseteq U$ kritisch und $\emptyset \neq A_0 \neq U$, so betrachten Sie die von $A_0 \cup \Gamma(A_0)$ bzw. $(U \setminus A_0) \cup (W \setminus \Gamma(A_0))$ induzierten Teilgraphen von G.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall:
(i) Ein bipartiter und r-regulärer Graph G (d.h. $d(v) = r$ für alle Ecken v aus G) lässt sich in r kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen.
(ii) Ist G ein bipartiter Graph und r der maximale Eckengrad von G, so kann man G in r kantendisjunkte Matchings zerlegen.

Aufgabe 3. (a) Es sei $m \leq n$ und A eine $m \times n$ Matrix mit Einträgen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$, wobei jede Zahl höchstens einmal in jeder Zeile und höchstens einmal in jeder Spalte vorkommt (A heißt auch Lateinisches Rechteck). Zeigen Sie, dass sich jedes $m \times n$ Lateinische Rechteck zu einem $n \times n$ Lateinischen Quadrat erweitern lässt.
(b) Geben Sie eine partiell definierte $n \times n$ Matrix mit n Einträgen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ an, die nicht zu einem Lateinischen Quadrat ergänzt werden kann.
Hinweis zu (a): Bestimmen Sie eine weitere Zeile, indem Sie den Satz von Hall auf einen geeigneten bipartiten Graphen anwenden.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie im abgebildeten bipartiten Graphen $G = (U \cup W, E)$ ein Maximum Matching und eine Knotenüberdeckung minimaler Größe mit Hilfe der 'Ungarischen Methode'. Starten Sie mit dem Matching $M = \{u_1w_1, u_3w_3, u_5w_5, u_8w_8\}$ und wählen Sie in Schritt (1.1) des Algorithmus stets denjenigen Knoten aus, der unter allen im vorigen Schritt neu markierten Knoten den kleinsten Index hat. Sie können zur Lösung das Hilfsblatt zur dritten Übung verwenden.