

2. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei D ein Digraph mit Inzidenzmatrix B .

(a) Die Matrix $K := BB^T$ heißt Kirchhoffmatrix. Beschreiben Sie die Einträge aus K mit Hilfe des Digraphen D .

(b) Zeigen Sie: Die Zahl der Spannenden Bäume in D ist gleich $\det(B_0 B_0^T)$, wobei B_0 aus B durch Streichen einer beliebigen Zeile entsteht.

Hinweis zu (ii): Benutzen Sie den Satz von *Cauchy-Binet*: $\det B_0 B_0^T = \sum (\det C)^2$, wobei über alle $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrizen C von B_0 summiert wird.

Aufgabe 2. Sei V eine Menge mit $|V| = n$. Zeigen Sie, dass es genau n^{n-2} Bäume mit der Eckenmenge V gibt.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1 b).

Aufgabe 3. Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$ mit gewichteten Bogen, so dass keine gerichteten Kreise mit negativem Gesamtgewicht existieren. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der von einem Startpunkt $s \in V$ zu allen anderen Punkten $v \in V \setminus \{s\}$ kürzeste gerichtete Wege bestimmt.

Aufgabe 4. a) Ein schlichter und bewerteter Digraph mit den 4 Ecken v_1, \dots, v_4 sei durch folgende Bewertungsmatrix gegeben:

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	5	4
v_2	∞	0	-1	6
v_3	3	2	0	-5
v_4	7	7	5	0

b) Ein schlichter und bewerteter Digraph mit den 8 Ecken x_1, \dots, x_8 sei durch folgende Bewertungsmatrix gegeben:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	2	5	4	3	8	2	1
x_2	∞	0	1	6	7	∞	5	3
x_3	3	2	0	5	3	4	2	3
x_4	7	4	5	0	3	6	4	2
x_5	6	2	∞	6	0	∞	5	3
x_6	1	3	1	6	3	0	2	∞
x_7	5	2	4	3	3	∞	0	3
x_8	4	3	5	4	3	2	5	0

Dabei bedeutet ein Eintrag a an der Stelle (i, j) für $a < \infty$, dass ein Bogen mit Bewertung a vom Knoten v_i zum Knoten v_j bzw. vom Knoten x_i zum Knoten x_j führt. Ist $a = \infty$, so existiert dieser Bogen nicht. Führen Sie den Algorithmus aus Aufgabe 3 für diese beiden Digraphen durch. Wählen Sie dabei $s := v_3$ für den ersten Digraphen und $s := x_1$ für den zweiten Digraphen.