14. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.
3-*Colouring*: Ist G 3-färbbar, d.h. existiert eine Abbildung $c : V \to \{1, 2, 3\}$, so dass $c(u) \neq c(v)$ für alle adjazenten Ecken u, v?
Zeigen Sie, dass 3-*Colouring* **NP**-vollständig ist.
Hinweis: Konstruieren Sie eine Reduktion von 3-SAT auf 3-*Colouring*.

Aufgabe 2. Es sei Φ eine beliebige aussagenlogische Formel in konjuktiver Normalform, so dass jede Klausel von Φ höchstens 3 Literale enthält ($\Phi \in$ 3-SAT). Ferner sei m die maximale Anzahl gleichzeitig erfüllbarer Klauseln von Φ. Entwickeln Sie einen polynomialen Algorithmus A, der eine Belegung der Variablen von Φ konstruiert, so dass mindestens $\frac{m}{2}$ Klauseln erfüllt sind (d.h. $R_A = 2$ für das Problem MAX-3-SAT).

Aufgabe 3. Beweisen Sie den folgenden Satz von Sahni und Gonzalez. Falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ ist, so gibt es für kein $\epsilon > 0$ einen ϵ-approximativen, polynomialen Algorithmus für das Traveling-Salesman-Problem.
Hinweis: Führen Sie die gegenteilige Annahme mit Hilfe von *Hamilton Circuit* zu einem Widerspruch.

Aufgabe 4. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $V = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. Ferner seien positive Zahlen $d(S_i, S_j) = d(S_j, S_i)$ für alle Paare $(S_i, S_j) \in E$ gegeben (Notation: $d(e)$ für $d(S_i, S_j)$, falls $e = S_iS_j$). Es gelte nun die folgende Bedingung: sind $e_1, e_2, \ldots, e_l$ die Kanten eines Kreises in G, so ist $d(e_1) \leq \sum_{i=2}^{l} d(e_i)$. Dann wird durch

$$d'(S_i, S_j) = \begin{cases} d(S_i, S_j) & \text{, falls } S_iS_j \in E \\ \min\left\{\sum_{e \in E'} d(e) \mid E' \text{ Kantenmenge eines } S_iS_j\text{-Weges}\right\} & \text{, sonst} \end{cases}$$

eine Metrik auf V definiert.

Aufgabe 5. Es sei eine Menge $S := \{1, 2, ..., 10\}$ gegeben, desweiteren seien $c_1 = c_3 = c_5 = 2$, $c_2 = 1$, $c_4 = c_8 = c_{10} = 5$, $c_6 = 3$, $c_7 = 7$, $c_9 = 4$ und $B = 9$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Heuristiken
i) Next-Fit,
ii) First-Fit und
iii) First-Fit-Decreasing
jeweils eine zulässige Lösung für das Bin-Packing-Problem.
Ist eine der Lösungen optimal?