Lehrstuhl II für Mathematik http://www.math2.rwth-aachen.de
Prof. Dr. E. Triesch **WS 2010/2011**

11. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Gegeben sei das Minimum Cost Flow Problem (MCF) $\min c^t x$ s. t. $Bx = b$ und $0 \le x \le u$. Dabei ist B die Inzidenzmatrix des zugrunde liegenden Netzwerks $D = (V, A)$, $c \in \mathbb{R}^{|A|}$ der Zielfunktionsvektor, $b \in \mathbb{R}^{|V|}$ der Nachfrage- bzw. Verbrauchsvektor und $u \in (\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\})^{|A|}$ die Kapazitätsfunktion.
Zeigen Sie, dass das (MCF) genau dann eine nach unten beschränkte Zielfunktion hat, wenn es keinen gerichteten Kreis C im zugrunde liegenden Netzwerk $D = (V, A)$ gibt, dessen Bögen unbeschränkte Kapazität besitzen ($u_a = \infty$ für alle Bögen a des Kreises C) und bei dem die Summe $\sum\limits_{a \text{ Bogen von } C} c_a$ negativ ist.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $\mathbb{E}_m$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{Z}^{m \times m}$. Zeigen Sie:
i) Wenn A vollständig unimodular (vu) ist, dann sind auch $-A$, A^t und $[\mathbb{E}_m, A]$ vu.
ii) Ist A vu, so ist auch $[\mathbb{E}_n, -\mathbb{E}_n, A^t, -A^t]^t$ vu.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ genau dann vollständig unimodular ist, wenn für alle Vektoren $c, d \in \mathbb{Z}^n$ und alle Vektoren $a, b \in \mathbb{Z}^m$ jede Ecke des Polyeders $\{x \in \mathbb{R}^n | c \le x \le d, a \le Ax \le b\}$ ganzzahlig ist.
Hinweis:
1. Verwenden Sie Aufgabe 1 iii) für die Hinrichtung.
2. Für die andere Richtung benutze man den Satz von Hoffman und Kruskal mit $c = 0$. Finden Sie dann a und d so, dass jede Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n | 0 \le x, Ax \le b\}$ enthalten ist in der Menge der Ecken von $\{x \in \mathbb{R}^n | 0 \le x \le d, a \le Ax \le b\}$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie den Satz von König mit Hilfe des Dualitätssatzes.

★ **Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr.** ★