

## 10. Übung Optimierung B

**Aufgabe 1.** Es sei  $D = (V, A)$  ein Digraph und  $T := (V, A')$  ein gerichteter Baum. Dann sei  $C$  die folgende  $|A| \times |A'|$ -Matrix:

Für alle  $a' \in A'$  und  $a = (u, v) \in A$  ist

$$c_{a',a} = \begin{cases} +1, & \text{falls auf einem ungerichteten } (u-v)\text{-Weg in } T \text{ die Kante } a' \text{ vorwärts benutzt wird} \\ -1, & \text{falls auf einem ungerichteten } (u-v)\text{-Weg in } T \text{ die Kante } a' \text{ rückwärts benutzt wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

$C$  heißt *Netzwerkmatrix*.

Zeigen Sie,  $C$  ist vollständig unimodular.

**Aufgabe 2.** Eine Intervall-Matrix ist eine 0-1-Matrix so, dass die 1-Einträge in jeder Zeile fortlaufend sind. Zeigen Sie, dass jede Intervall-Matrix vollständig unimodular ist.

**Aufgabe 3.** Es sei  $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphens  $G$ , also

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ mit } e_j \text{ inzidiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

$A$  ist genau dann vollständig unimodular, wenn  $G$  bipartit ist.

**Aufgabe 4.**

Stellen Sie zu folgenden linearen Optimierungsproblemen, die zugehörigen dualen Probleme auf. Dabei sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  und  $c \in \mathbb{R}^n$ :

- $\max c^t x$  s. t.  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ ,
- $\max c^t x$  s. t.  $Ax \leq b$ ,
- $\min c^t x$  s. t.  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ ,
- $\min c^t x$  s. t.  $Ax = b$ .