Lehrstuhl II für Mathematik http://www.math2.rwth-aachen.de
Prof. Dr. E. Triesch **WS 2010/2011**

9. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Auf der Menge $\mathcal{P}_n := \{(p_1, \ldots, p_n) \mid p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$ sei die folgende Ordnungsrelation gegeben:

$$p \preceq q \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{k} p_i \leq \sum_{i=1}^{k} q_i \text{ für alle } 1 \leq k \leq n-1.$$

Zeigen Sie:

$$p \preceq q \Leftrightarrow \text{ Es existiert eine doppeltstochastische Matrix } M \text{ mit } Mq = p.$$

Hinweis:
Zeigen Sie die Existenz einer gewünschten Matrix per vollständigen Induktion nach der Zahl der i mit $p_i \neq q_i$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie den folgenden Satz von Havel und Hakimi:
Eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ ist genau dann Gradsequenz eines Graphen, wenn die Folge $d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_{d_n} - 1, d_{d_n+1}, d_{d_n+2}, \ldots, d_{n-1}$ Gradsequenz eines Graphen ist.

Aufgabe 3. Ein *Multigraph* ist ein Graph, in dem mehrfache (d.h. parallele) Kanten zwischen Eckenpaaren zugelassen sind. Zeigen Sie:
Eine Folge $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$ ganzer Zahlen ist genau dann durch einen Multigraphen realisierbar, wenn die Summe $\sum_{i=1}^{n} d_i$ gerade ist und $d_1 \leq d_2 + d_3 + \ldots + d_n$ gilt.
Hinweis: Beweisen Sie die Aufgabe mit vollständiger Induktion nach $|V(G)|$ und unterscheiden Sie für $|V(G)| \geq 4$ die Fälle $d_1 - d_2 = 0$, $d_1 - d_2 \geq d_n$ und $0 < d_1 - d_2 < d_n$.

Aufgabe 4. Eine Folge $d := (d_1, ..., d_n)$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ ist genau dann die Gradsequenz eines schlichten Graphens mit perfektem Matching, wenn $d' := (d_1 - 1, ..., d_n - 1)$ und $d := (d_1, ..., d_n)$ Gradsequenzen von schlichten Graphen sind.

Doppeltstochastische Matrix:

Eine $n \times n$ Matrix $P = (p_{ij})_{0 \leq i,j < n}$ heißt stochastisch, falls alle Einträge p_{ij} nichtnegativ und alle Zeilensummen gleich Eins sind:

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } i = 0, ..., n-1.$$

Sind zusätzlich auch alle Spaltensummen gleich 1, also

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } j = 0, ..., n-1,$$

so nennt man P doppeltstochastisch.