8. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgende Aussage: Der Dijkstra Algorithmus (siehe nächste Seite), durchgeführt am Graphen $D = (V, A)$ mit ausgezeichneter Ecke s, liefert zu jeder Ecke $v \in V$ die Länge $\operatorname{dist}(v)$ eines kürzesten gerichteten $(s-v)-$Weges ($\operatorname{dist}(v) = \infty$ bedeutet, dass kein solcher Weg existiert). Der Digraph $F := (V', A')$ mit

$$V' := \{v \in V \mid \operatorname{dist}(v) < \infty\} \text{ und } A' := \{(\operatorname{pred}(v), v) \mid v \in V' \setminus \{s\}\}$$

hat die folgenden Eigenschaften:
1. $A' \subseteq A$.
2. F ist ein Baum.
3. Für jede Ecke $v \in V' \setminus \{s\}$ gibt es genau einen gerichteten $(s-v)-$Weg in F. Dies ist gleichzeitig ein kürzester $(s-v)-$Weg in D.

Aufgabe 2. Beweisen Sie den Satz von Dilworth ohne den Satz von König direkt per Induktion nach $|P|$.
Hinweis: Zeigen Sie nur die nicht-triviale Ungleichung. Für den Induktionsschritt untersuchen Sie die folgenden zwei Fälle:
1. Es gibt eine Antikette L maximaler Kardinalität, die weder alle maximalen noch alle minimalen Elemente von P enthält. In diesem Fall seien

$$I = L \cup \{p \in P | \text{ es existiert ein } q \in L \text{ mit } p \prec q\}$$

$$F = L \cup \{p \in P | \text{ es existiert ein } q \in L \text{ mit } q \prec p\} = L \cup (P - I).$$

Wenden Sie dann die Induktionsvoraussetzung auf I und F an.
2. Die einzigen Kandidaten für eine maximale Antikette in P sind die Mengen aller maximalen bzw. minimalen Elemente von P. Wählen Sie $p, q \in P$ so, dass p minimal und q maximal in P und $p \prec q$ ist und wenden Sie die Induktionsvoraussetzung dann auf $P - \{p, q\}$ an.

Aufgabe 3. i) Angenommen, es sind $N = nm + 1$ verschiedene Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ von links nach rechts an eine Tafel geschrieben. Zeigen Sie, dass einige Zahlen so weggewischt werden können, dass
- entweder $n+1$ Zahlen $a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ mit $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$ und $a_{i_0} < a_{i_1} < \ldots < a_{i_n}$
- oder $m+1$ Zahlen $a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ mit $j_0 < j_1 < \ldots < j_m$ und $a_{j_0} > a_{j_1} > \ldots > a_{j_m}$
übrigbleiben.
ii) Angenommen, es sind $N = nm + 1$ (offene) Intervalle auf $\mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:
Es gibt entweder $n+1$ Intervalle mit einem gemeinsamen Punkt oder $m+1$ paarweise disjunkte Intervalle.
Hinweis: Wenden Sie dann den Satz von Dilworth an.

Aufgabe 4. Es sei (D, s, t) ein Netzwerk mit Kapazitätsfunktion $c_a = 1$ für alle Bogen $a \in A$. Zeigen Sie:
i) Ist C ein minimaler Schnitt, so ist die Kapazität $cap(C)$ gleich der minimalen Anzahl von Bogen, deren Streichung alle $(s-t)$-Wege zerstört.
ii) Ist x ein maximaler Fluß, so ist die Flußstärke $val(x)$ gleich der maximalen Anzahl p der bogendisjunkten $(s-t)$-Wege.

Aufgabe 5. Zeigen Sie die folgenden Sätze von Menger (1927).
i) Es sei $D = (V, A)$ ein Netzwerk und $u, v \in V$ seien zwei verschiedene Ecken von D, die nicht durch einen Bogen (u, v) verbunden sind. Dann ist die maximale Anzahl p von eckendisjunkten $(u{-}v)$-Wegen gleich der minimalen Anzahl q von Ecken, deren Herausnahme aus D alle $(u{-}v)$-Wege zerstört.
ii) Formulieren und beweisen Sie die 'ungerichtete Version' von Teil i).
<u>Hinweis:</u> Es sei $D = (V, A)$ ein Netzwerk und $u, v \in V$ seien zwei verschiedene Ecken von D. Dann ist die maximale Anzahl p der bogendisjunkten $(u - v)$-Wege gleich der minimalen Anzahl q von Bogen, deren Streichung alle $(u - v)$-Wege zerstört.

Dijkstra-Algorithmus:

Eingabe: Ein Digraph $D := (V, A)$ mit einer ausgezeichneten Ecke $s \in V$ und einer Längenfunktion $l : A \to \mathbb{R}^+$.
Schritt 1: Setze $\mathrm{dist}(s) := 0$, $\mathrm{dist}(v) = l(a)$ für $a = (s, v) \in A$ und $\mathrm{dist}(v) = \infty$ für $(s, v) \notin A$. Außerdem definiere $T := V \setminus \{s\}$ und $\mathrm{pred}(v) := s$ für $v \in T$.
Schritt 2: Sei $U := \{u \in T \mid \mathrm{dist}(u) \leq \mathrm{dist}(v) \text{ für alle } v \in T\}$, setze dann $T := T \setminus U$.
Schritt 3: Für jedes $u \in U$ und für alle Bögen $a = (u, v) \in A$ mit $v \in T$ überprüfe man, ob $\mathrm{dist}(v) > \mathrm{dist}(u) + l(a)$. Falls ja, so setze man $\mathrm{dist}(v) := \mathrm{dist}(u) + l(a)$ und $\mathrm{pred}(v) := u$.
Schritt 4: Falls $T = \emptyset$: STOP. Anderenfalls gehe man zu Schritt 2.