5. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $A_G \neq \emptyset$ (alle Bezeichnungen sind wie im Gallai-Edmonds-Struktursatz gewählt). Der bipartite Graph $H = (U \cup W, F)$ sei wie folgt definiert: $U = A_G$, die Knoten in W entsprechen bijektiv den Komponenten von $G[D_G]$ und $uw \in F$ genau dann, wenn $u \in U = A_G$ mit der w entsprechenden Komponente in G verbunden ist. Zeigen Sie, dass dann $|\Gamma_H(S)| > |S|$ für alle $S \subseteq U$, $S \neq \emptyset$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $q(G)$ die Anzahl der ungeraden Komponenten von G.
i) Beweisen Sie den 1-Faktorsatz von Tutte:
G besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn $q(G - S) \leq |S|$ für alle $S \subseteq V$.
ii)Beweisen Sie die Berge-Formel:
Für alle Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$|V| - 2\nu(G) = \max_{S \subseteq V}(q(G - S) - |S|).$$

Aufgabe 3. i) Es sei $G = (V, E)$ ein 3-regulärer Graph ohne Brücken. Zeigen Sie den Satz von Petersen (1891):
G besitzt ein perfektes Matching.

ii) Konstruieren Sie einen 3-regulären Graphen, der kein perfektes Matching besitzt.

<u>Hinweis zu (i)</u>: Satz von Tutte. Ist $S \subseteq V$, $\emptyset \neq S \neq V$ und C eine ungerade Komponente von $G \setminus S$, so gibt es mindestens zwei $S - C$ Kanten, d.h. Kanten mit einem Endpunkt in S und einem Endpunkt in C. Zeigen Sie, dass es sogar drei $S - C$ Kanten gibt.

Aufgabe 4. Der Graph $G = (V, E)$ sei ν-saturiert, d.h. es gilt $\nu(G + e) > \nu(G)$ für jede Kante $e \in \binom{V}{2} \setminus E$. Beschreiben Sie möglichst genau die Struktur von G.
<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie den Gallai-Edmonds-Struktursatz.