2. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Sei V eine Menge mit $|V| = n$. Zeigen Sie, dass es genau n^{n-2} Bäume gibt mit Eckenmenge V.
Hinweis: Prüfer Code.
Sei $V = \{v_1, ..., v_n\}$. Jedem Baum T auf V ordnen wir einen Vektor $(a_1, ..., a_{n-1})$ folgendermaßen zu:
1. Es sei v_i das Blatt mit dem kleinsten Index. Dann bezeichnen wir mit a_1 den Index der Nachbarecke von v_i und setzen $b_1 = v_i$.
2. Es sei v_i das Blatt mit dem kleinsten Index in $T - b_1$, dann bezeichnen wir mit a_2 den Index der Nachbarecke von v_i und setzen $b_2 = v_i$.
Allgemein:
Es sei v_i das Blatt mit dem kleinsten Index in $T - \{b_1, ..., b_j\}$, dann sei a_{j+1} der Index der Nachbarecke von v_i und setze $b_{j+1} = v_i$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann bipartit ist, wenn alle Kreise in G gerade Länge haben.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, daß ein Baum höchstens ein perfektes Matching besitzt.

Aufgabe 4. Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall, dass $\nu(G) = |U| - \delta$, wobei $\delta = \max_{X \subset U} \{|X| - |\Gamma(X)|\}$.

Aufgabe 5. Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W. In G sei die Hall-Bedingung erfüllt und für jedes $u \in U$ gelte $d(u) = |\Gamma(u)| \geq r > 0$. Zeigen Sie als quantitative Verallgemeinerung des Satzes von Hall: Im Fall $r \leq |U|$ gibt es in G mindestens $r!$ verschiedene Matchings der Größe $|U|$ und im Fall $r > |U|$ mindestens $\frac{r!}{(r-|U|)!}$ solcher Matchings.
Hinweis: Induktion nach $|U|$. Eine Teilmenge A von U heißt kritisch, falls $|A| = |\Gamma(A)|$. Wenn es keine von $\emptyset$ und U verschiedene kritische Teilmenge von U gibt, so wählen Sie für ein $\hat{u} \in U$ einen beliebigen Matchingpartner $\hat{w} \in W$ aus. Was gilt dann für $G' := G \setminus \{\hat{u}, \hat{w}\}$? Ist $A_0 \subseteq U$ kritisch und $\emptyset \neq A_0 \neq U$, so betrachten Sie die von $A_0 \cup \Gamma(A_0)$ bzw. $(U \setminus A_0) \cup (W \setminus \Gamma(A_0))$ induzierten Teilgraphen von G.