Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. A.M.C.A. Koster
Jens Kampffmeyer

Optimierung B
Übung 11 vom 20.01.2009

Teil A: Aufgaben zur Besprechung in der Übung

Aufgabe 1 Es sei $A := (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphens G, also

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ mit } e_j \text{ inzidiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie:
A ist genau dann vollständig unimodular, wenn G bipartit ist.

Aufgabe 2 Beweisen Sie den Satz von König mit Hilfe des Dualitätssatzes.

Aufgabe 3 Eine Intervall-Matrix ist eine 0-1-Matrix so, dass die 1-Einträge in jeder Zeile fortlaufend sind. Zeigen Sie, dass jede Intervall-Matrix total unimodular ist.

Aufgabe 4 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass das System $Ax \leq b$ nicht TDI ist, aber dass das System TDI wird, falls man noch die redundante Ungleichung $x_1 \leq 0$ zu $Ax \leq b$ hinzufügt.
<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie den Zielfunktionsvektor $c = (1, 0)^t$.

Aufgabe 5 Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei total unimodular. Zeigen Sie, dass dann jede quadratische Untermatrix, in der in jeder Zeile und in jeder Spalte die Zahl der Einträge ungleich Null gerade ist, singulär ist.

Teil B: Aufgaben zur Abgabe in der Übung am 27.01.2010

Aufgabe 6 (3+2 Punkte) Sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ und $\mathbb{E}_m$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{Z}^{m\times m}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
i) Wenn A total unimodular ist, dann sind auch $-A$, A^t und $[\mathbb{E}_m, A]$ total unimodular.
ii) Falls die Determinante jeder $m \times m$-Untermatrix von $[\mathbb{E}_m, A]$ in der Menge $\{-1, 0, 1\}$ liegt, so ist A total unimodular.

Aufgabe 7 (3 Punkte) Sei $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $\beta \in \mathbb{Q}$.
$Ax \leq b$ sei ein TDI System und die Ungleichung $a^t x \leq \beta$ mit $a \in \mathbb{Q}^n$ folge aus $Ax \leq b$. Zeigen Sie, dass dann das System $Ax \leq b$, $a^t x \leq \beta$ ebenfalls TDI ist.

Aufgabe 8 (3 Punkte) Beweisen Sie den Satz über die schwache Dualität (siehe Vorlesung).

Aufgabe 9 (2 + 3 + 4 Punkte) Betrachten Sie das Problem auf Übung 9 Aufgabe 4 mit folgendem Zusatz: Die Waggons dürfen nur in dreier oder vierer Päckchen fahren, d.h. ein Zug hat z.B. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ Waggons, Waggons können dabei auch nur so in dreier oder vierer Päckchen abgespalten werden, dass der Rest wieder aus dreier und vierer Päckchen besteht (Beispiel: an einen Zug werden 10 = 4+3+3 Waggons angehängt, es ist nicht zulässig 8 = 4 + 4 Waggons abzutrennen, da dann nur noch 2 übrig bleiben).

Die minimal benötigten Waggons auf den einzelnen Strecken der Züge finden Sie unter FahrplanAmsterdam-Rotterdam-Roosendaal-Vlissingenneu.txt.

a) Wie sieht das Optimierungsproblem nun aus (Dies darf auch als Graphenproblem dargestellt werden).

b) Stellen Sie ein lineares Programm zur Lösung auf, geschrieben als

$$\{\min c^T x : \ Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Ist A total unimodular?

c) Lösen Sie das Problem mit ZIMPL/SCIP. Ist das Problem schwieriger als vorher (bzgl. Laufzeit, Knoten, B&B)
