Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. A.M.C.A. Koster
Jens Kampffmeyer

Optimierung B
Übung 9 vom 16.12.2009

Teil A: Aufgaben zur Besprechung in der Übung

Aufgabe 1 Gegeben sei die (deterministische) Turingmaschine $\mathcal{DEEPTHOUGHT} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ mit Zustandsmenge $Q := \{q_i \mid i = 0, 1, \ldots, 6\} \cup \{q_F\}$, Alphabet $A := \{B, 0, 1, \#\}$, Anfangszustand q_0, Endzustandsmenge $F := \{q_F\}$ und der folgenden Übergangsfunktion δ:

$q \in Q$	$a \in A$	$\delta(q,a)$
q_0	B	$(q_1, \#, R)$
q_0	0	$(q_0, 0, R)$
q_0	1	$(q_0, 1, R)$
q_1	B	$(q_2, 1, R)$
q_1	0	$(q_5, 0, R)$
q_1	1	$(q_1, 1, R)$
q_2	B	$(q_2, 0, N)$

$q \in Q$	$a \in A$	$\delta(q,a)$
q_2	0	$(q_3, 0, R)$
q_3	B	$(q_4, 1, R)$
q_3	0	$(q_F, 0, R)$
q_4	B	$(q_1, 0, L)$
q_5	B	$(q_5, 1, N)$
q_5	1	$(q_6, 1, R)$
q_6	B	$(q_3, 0, N)$

i) Bestimmen Sie für jeden Input $w \in \{0, 1\}^*$ (d.h. für jede Startkonfiguration $k_0 = q_0 w$) die Endkonfiguration von $\mathcal{DEEPTHOUGHT}$.
ii) Bestimmen Sie die Laufzeit der Turingmaschine.

Teil B: Aufgaben zur Abgabe in der Übung am 13.01.2010

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen Sie Satz 16.4 der Vorlesung:

Sei x ein zulässiger (s,t) - Fluss in D mit Wert f, der kostenminimal unter allen (s,t)-Flüssen mit Wert f ist und sei $N = (V, \overline{A}, \overline{c}, \overline{w})$ das zugehörige augmentierende Netzwerk.

Sei P ein $(s, t)-$ Weg in N mit minimalen Kosten $\overline{w}(P)$ und sei $\overline{x}$ ein zulässiger $(s, t)-$ Fluss in N, so dass $\overline{x}(\overline{a})$ für alle $\overline{a} \in P$ und $\overline{x}(\overline{a}) = 0$ für alle $\overline{a} \notin P$.

Dann ist der Vektor $x' \in \mathbb{R}^{|A|}$ definiert durch

$$x'(a) := x(a) + \overline{x}(a_1) - \overline{x}(a_2) \quad \forall a \in A$$

eine zulässiger s-t-Fluss in D mit Wert $f + val(\bar{(}x))$, der kostenminimal unter allen Flüssen dieses Wertes in D ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei das Minimum Cost Flow Problem (MCF) $\min c^t x$ s. t. $Bx = b$ und $0 \leq x \leq u$. Dabei ist B die Inzidenzmatrix des zugrunde liegenden Netzwerks $D = (V, A)$, $c \in \mathbb{R}^{|A|}$ der Zielfunktionsvektor, $b \in \mathbb{R}^{|V|}$ der Nachfrage- bzw. Verbrauchsvektor und $u \in (\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\})^{|A|}$ die Kapazitätsfunktion.
Zeigen Sie, dass das (MCF) genau dann eine nach unten beschränkte Zielfunktion hat, wenn es keinen gerichteten Kreis C im zugrunde liegenden Netzwerk $D = (V, A)$ gibt, dessen Bögen unbeschränkte Kapazität besitzen ($u_a = \infty$ für alle Bögen a des Kreises C) und bei dem die Summe $\sum\limits_{\text{a Bogen von C}} c_a$ negativ ist.

Aufgabe 4 (3 + 8 Punkte)

Gegeben sei der tägliche Fahrplan in der Datei FahrplanAmsterdam-Rotterdam-Roosendaal-Vlissingen (hin und zurück, hierbei steht A für Amsterdam, R für Rotterdam, S für Roosendaal und V für Vlissingen). Dabei bedeuten z.B. A0935 R0950 3, das ein Zug von Amsterdam nach Rotterdam um 09:35h in Amsterdam startet und um 09:50h in Rotterdam endet und dabei mindestens drei Waggons besitzen muss. Ziel ist es, die Anzahl der Waggons zu minimieren.

a) Formulieren Sie das Problem als ein Minimum Cost Flow Problem.

b) Transformieren Sie das Problem in ein lineares Programm (also in der Form $\min c^{tr}x, b \leq Ax \leq d$), schreiben Sie dies in der Modellierungssprache ZIMPL und lösen Sie dies dann mit dem Programm SCIP (LP Solver). Die Programme sowie eine Anleitung zu ZIMPL finden Sie unter http://zibopt.zib.de. Es müssen hierbei auf der Internetseite keine Angaben zu Person und Emailadresse gemacht werden!

Sie dürfen die Aufgabe zu dritt bearbeiten.
