Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. A.M.C.A. Koster
Jens Kampffmeyer

Optimierung B
Übung 5 vom 18.11.2009

Teil A: Aufgaben zur Besprechung in der Übung

Aufgabe 1 Es sei G ein Graph und M^* ein gesättigtes bzw. maximales Matching, d.h. es existiert keine Kante, die den Kanten des Matchings mehr hinzugefügt werden kann (nicht zu verwechseln mit einem Maximum Matching). Zeigen Sie die folgende Aussage:

Ist M ein beliebiges Matching von G, so gilt $|M| \leq 2|M^*|$.

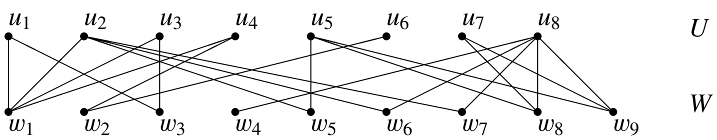
Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann bipartit ist, wenn alle Kreise in G gerade Länge haben.

Aufgabe 3 Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall:
(i) Ein bipartiter und r-regulärer Graph G (d.h. $deg(v) = r$ für alle Ecken v aus G) lässt sich in r kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen.
(ii) Ist G ein bipartiter Graph und r der maximale Eckengrad von G, so kann man G in r kantendisjunkte Matchings zerlegen.

Teil B: Aufgaben zur Abgabe in der Übung am 25.11.2009

Aufgabe 4 (4 Punkte) In einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ wählen zwei Spieler abwechselnd verschiedene Knoten $u_1, u_2, u_3, \ldots$ unter der Bedingung $u_i u_{i+1} \in E\,(i \geq 1)$ aus. Der letzte Spieler, der noch einen Knoten wählen kann, gewinnt. Zeigen Sie, dass der erste Spieler genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn G kein perfektes Matching (d.h. ein Matching, das ganz V überdeckt) besitzt.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Bestimmen Sie im abgebildeten bipartiten Graphen $G = (U \cup W, E)$ ein Maximum Matching und eine Knotenüberdeckung minimaler Größe mit Hilfe des Algorithmus aus der Vorlesung. Starten Sie mit dem Matching $M = \{u_5 w_5\}$. Sie können zur Lösung das Hilfsblatt zur fünften Übung verwenden.



Aufgabe 6 (4 Punkte) Beweisen Sie, daß ein Baum höchstens *ein* perfektes Matching (das heißt ein Matching mit $\nu = \frac{|V|}{2}$) besitzt.

Aufgabe 7 (3 + 7 Punkte) Betrachten Sie folgendes Problem: Es gibt 20 Standorte, die jeweils unterschiedliche Angebote (x Tonnen Lebensmittel) haben, zusätzlich dazu 20 Standorte mit unterschiedlicher Nachfrage (ebenfalls x Tonnen Lebensmittel) sowie die Kosten für einen Transport von einer Tonne von den Angebotsstandorten zu den Nachfragestandorten. Gesucht sind dann die minimalen Transportkosten, um der gesamten Nachfrage nachzukommen (in unserem Beispiel ist dies gleich dem Angebot). Die Daten hierfür können Sie der Datei Transportation40.txt entnehmen. Die Notation ist hierbei folgende:

Die Zeilen beginnend mit n sind die Standorte mit Angebotswerten (positiv) bzw. mit Nachfragewerten (negativ). Die Zeilen beginnend mit a bedeuten, dass der Transport *einer Tonne* von Standpunkt x (erster Wert) zu Standpunkt y (zweiter Wert) genau z Euros (letzter bzw. fünfter Wert) beträgt.(bzw. nicht möglich ist, wenn keine Kante angegeben ist).

a) Formulieren Sie dieses Problem ausgehend von einem bipartiten Graphen als maximal gewichtetes Matching Problem.

b) Lösen Sie das Problem, indem Sie die *Ungarische Methode* für gewichtete Graphen implementieren und auf das obere Problem anwenden.

Sie dürfen diese Aufgabe zu dritt abgeben. Der Abgabezeitpunkt ist der 25.11.2009.