Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. A.M.C.A Koster
Jens Kampffmeyer

Optimierung B
Übung 4 vom 11.11.2009

Teil A: Aufgaben zur Besprechung in der Übung

Aufgabe 1 Gegeben sei ein Baum $T = (V, E)$ mit Wurzel $r \in V$ und Eckengewichten c_v für $v \in V$. Ziel ist es, ein Teilgraphen auszuwählen, der ebenfalls ein Baum mit Wurzel r ist und dabei maximales Gewicht besitzt (bzw. leer ist, wenn in der Summe alle Gewichte negativ sind).

a) Erstellen Sie ein Konzept zur Lösung des Problems mit Hilfe der dynamischen Programmierung

b) Wenden Sie dieses Konzept auf den Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \cdots, v_{12}\}$, $c_{v_5} = -6; c_{v_1} = c_{v_{11}} = -2; c_{v_2} = c_{v_3} = c_{v_6} = -1; c_{v_8} = 1; c_{v_9} = 2; c_{v_{10}} = c_{v_{12}} = 3; c_{v_7} = c_{v_4} = 4$ sowie $K = \{(v_1, v_2); (v_1, v_3); (v_2, v_4); (v_2, v_5); (v_2, v_6); (v_3, v_7); (v_3, v_8); (v_5, v_9); (v_5, v_{10}); (v_8, v_{11}); (v_8, v_{12})\}$ und Wurzel v_1 an.

Aufgabe 2 Ein (s, t)-Schnitt in einem Digraph $D = (V, A)$ mit $s, t \in V$ ist eine Bogenmenge $B \subseteq A$ mit der Eigenschaft, dass jeder (s, t)-Weg mindestens einen Bogen aus B enthält.

Anders gesagt: Für jeden s, t-Schnitt B gibt es eine Knotenmenge W, für die gilt:

- $s \in W, \quad t \in V \setminus W$
- $\delta^+(W) := \{(i, j) \in A : i \in W, j \in V \setminus W\} \subseteq B$

Zeigen Sie:

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph, $c(a) = 1\ \forall a \in A$, und $s, t \in V, s \neq t$. Dann ist die Minimallänge eines (s, t)-Weges gleich der maximalen Anzahl bogendisjunkter (s, t)-Schnitte.

Teil B: Aufgaben zur Abgabe in der Übung am 18.11.2009

Aufgabe 3 (3 Punkte) Lösen Sie das 0-1 (d.h. $x_i \in \{0, 1\}$) Rucksack Problem

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 + 7x_2 + 25x_3 + 24x_4 \\ \text{u.d.B.} \quad & 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq \lambda \end{aligned}$$

mit Hilfe der dynamischen Programmierung für $\lambda = 7$ und $\lambda = 9$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie die Verallgemeinerung zu Aufgabe 2:

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph, $c(a) \in \mathbb{Z}_+$ und $s, t \in V, s \neq t$. Dann ist die kürzeste Länge eines (s,t)-Weges gleich der maximalen Anzahl d von (nicht notwendig verschiedenen) (s, t)-Schnitten $C_1, \cdots, C_d$, so dass jeder Bogen $a \in A$ in höchstens $c(a)$ Schnitten C_i liegt.

Hinweis: Definieren Sie geeignete Schnitte.

Aufgabe 5 (3 + 2 Punkte) Eine Firma plant die Herstellung neuer Kühlschränke. Hierfür werden fünf neue Maschinen benötigt, die an vier Standorten aufgestellt werden können. Die Anzahl an Kühlschränken (in Tausend pro Woche), die an den jeweiligen Standorten produziert werden können, finden Sie in der folgenden Tabelle :

Anzahl Masch.	Standort 1	Standort 2	Standort 3	Standort 4
0	1	0	1	0
1	3	2	3	4
2	5	4	4	4
3	6	5	6	5
4	6	6	7	6
5	6	9	8	7

a) Überlegen Sie sich eine Lösungsmethode mit Hilfe der dynamischen Programmierung für das oben genannte Problem. Zeigen Sie die Richtigkeit Ihres Algorithmusses.

b) Führen Sie den Algorithmus an dem obigen Beispiel durch

Aufgabe 6 (9 Punkte) Gegeben sei das 0-1 Rucksack Problem mit zwei Nebenbedingungen in der Datei DuoKnapsack.txt. Die erste Zahlenkolonne beschreibt hierbei die Koeffizienten der zu maximierende Zielfunktion, die zweite und dritte Kolonne die der Nebenbedingungen. In beiden Fällen sollen die Nebenbedingungen kleiner gleich 3000 erfüllen. Die Werte sind zeilenweise zu verstehen.

Lösen Sie das Problem mittels dynamischer Programmierung, d.h. entwerfen Sie einen rekursiven Algorithmus, der das Problem löst und implementieren Sie diesen. Ausgabe sollte der maximale Zielfunktionswert sowie die aufgenommenen Elemente und die Funktionsaufrufe in der Rekursion sein.

Hinweis: Der optimale Zielfunktionswert beträgt 1095445. Sie dürfen die Aufgabe zu dritt abgeben.
