Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. A.M.C.A Koster
Jens Kampffmeyer

Optimierung B
Übung 2 vom 28.10.2009

Teil A: Aufgaben zur Besprechung in der Übung

Aufgabe 1

Ein einfacher und bewerteter Digraph mit den 8 Ecken $x_1, ..., x_8$ sei durch folgende Bewertungsmatrix gegeben:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 2 & 1 \\ x_2 & \infty & 0 & 1 & 6 & 7 & \infty & 5 & 3 \\ x_3 & 3 & 2 & 0 & 5 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ x_4 & 7 & 4 & 5 & 0 & 3 & 6 & 4 & 2 \\ x_5 & 6 & 2 & \infty & 6 & 0 & \infty & 5 & 3 \\ x_6 & 1 & 3 & 1 & 6 & 3 & 0 & 2 & \infty \\ x_7 & 5 & 2 & 4 & 3 & 3 & \infty & 0 & 3 \\ x_8 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 0 \end{array}.$$

Dabei bedeutet ein Eintrag a an der Stelle (i, j) für $a < \infty$, dass ein Bogen mit Bewertung a vom Knoten x_i zum Knoten x_j führt. Ist $a = \infty$, so existiert dieser Bogen nicht. Führen Sie den Dijstra-Algorithmus ausgehend von der Ecke $s := x_1$ durch.

Aufgabe 2

a) Führen Sie den Algorithmus von Moore, Bellman und Ford an dem Digraphen mit Bewertungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ \infty & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 7 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

durch und wählen Sie $s := x_3$.

b) Welche Problematik entsteht bei dem Algorithmus, wenn in einem Graphen ein Kreis negativer Länge existiert?

Aufgabe 3

Sei G ein Graph mit Eckenmenge V. Zeigen Sie, dass es dann mindestens zwei Ecken mit gleichem Grad in V gibt.

Aufgabe 4

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n = |V| \geq 2$ Knoten und zwei Komponenten.

a) Geben Sie eine obere Schranke für die Zahl der Kanten in G an.

b) Geben Sie für jedes n einen solchen Graphen mit maximaler Kantenzahl an.

Aufgabe 5

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

a) Eine Kante $e = xy \in E$ ist genau dann ein Brücke, wenn sie ihre Endpunkte x und y trennt.

b) Eine Kante $e \in E$ ist genau dann eine Brücke, wenn e auf keinem Kreis liegt.

Teil B: Aufgaben zur Abgabe in der Übung am 04.11.2009

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 3.2 aus der Vorlesung:

In einem Digraph D = (V,A) gibt es einen (s,t)-Weg genau dann, wenn $\sigma(s) < \sigma(t)$ in allen Permutationen σ mit

$$\text{indeg}_{D[\sigma^{-1}(i),\cdots,\sigma^{-1}(n)]}(\sigma^{-1}(i)) = 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Aufgabe 7 (3+2+3 Punkte)

Herr Müller plant ein Auto zu kaufen am Anfang des kommenden Jahres der Marke BMW. Dabei ist vorausgesetzt, dass er die ganze Zeit am gleichen Wohnort lebt und zum gleichen Händler geht. Er kann hierbei nicht nur ein Auto vom Händler kaufen, sondern ebenfalls nach 0,1,2,3 Jahren wieder zurückgeben (um sich dann wieder einen gleichen neuen Wagen zu kaufen). Darüberhinaus gibt der Händler ihm die Garantie, dass die jährlichen Wartungskosten und Wiederverkaufpreise konstant bleiben. Die Preise hierfür betragen:

Kosten im jew. Jahr	Wartungskosten	Verkaufswert
1	2000	6000
2	4000	5000
3	6000	4000
4	7000	2000

a) Nehmen Sie an, dass Herr Müller einen neuen BMW für 12000 Euro bei Händler A kaufen kann, wobei dieser Preis fix ist für die nächsten vier Jahre. Welche Strategie sollte Herr Müller verfolgen (in Bezug auf Kaufpreis, Wartung und Wiederverkaufswert), um seine Kosten zu minimieren? Muss das gesamte Problem erneut komplett gelöst werden, wenn der Kaufpreis eines Wagens von 12000 Euro auf x Euro steigt oder sinkt.

b) Nehmen Sie nun an, dass wieder die Preise aus der obigen Tabelle gelten, nur wird nun prognostiziert, dass die Verkaufspreise für die nächsten vier Jahre 12000, 11000, 10000, 7000 Euro (Jahr 0 bis Jahr 3) betragen. Welche Strategie sollte Herr Müller nun verfolgen.

c) Frau Müller fährt lieber Rover als BMW und kauft diesen bei Händler B. Die gesamten Kosten hierfür betragen

Kosten im jew. Jahr	Wartungskosten	Verkaufswert	Kaufpreis Neuwagen
1	2000	8000	16000
2	3000	7000	14000
3	7000	5000	11000
4	8000	3000	10000

Es besteht nun die Möglichkeit, zwischen Händler A und B hin- und herzuwechseln für die nächsten 4 Jahre (hierbei wird ein Auto, dass bei Händler x gekauft wird, auch nur an diesen verkauft). Welche Strategie sollte nun angewendet werden? Erklären Sie die Methode, mit der Sie eine Lösung finden.

Aufgabe 8 (5 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein bewerteter Graph mit positiven Kantengewichten $c(e), e \in E$. Für einen Weg W in G, wird die Reliabilität (die Ausfallsicherheit) des Weges definiert als das minimale Kantengewicht unter den Kanten, die im Weg W existieren. Die Reliabilität $r_G(u, v)$ zweier Knoten u und v ist definiert als die maximale Reliabilität aller Wege von u nach v.

Zeigen Sie:

Ist T ein maximal aufspannender Wald, so ist die Reliabilität aller Knotenpaare identisch mit der Reliabilität in G, d.h.

$$r_T(u, v) = r_G(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Aufgabe 9 (8 Punkte) Gegeben sei der ungerichtete Graph, der durch die Kanten in Datei Bier127.txt gegeben ist. Dabei betrachten wir einen Graphen mit 127 Knoten. Die Notation der Datei ist hierbei Kante von Knoten x zu Knoten y, Kantengewicht. Programmieren Sie den Algorithmus von Dijkstra, der Ihnen den kürzesten Weg von Biergarten 96 zu Biergarten 124 liefert in Maple oder C++.

Diese Aufgabe dürfen Sie zu maximal drei Personen bearbeiten.

Zur Veranschaulichung des Graphen können Sie folgende Grafik betrachten

---

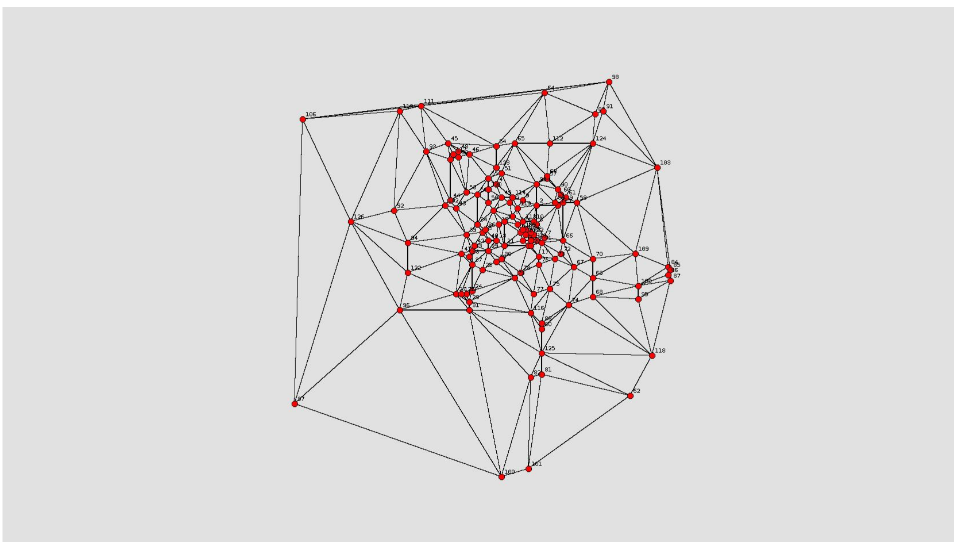

Abbildung 1: Ein Hamiltonischer Kreis minimaler Länge durch West-Deutschland (nur zur Illustration der Daten)