

Optimierung B Übung 1 vom 21.10.2009

Teil A: Aufgaben zur Besprechung in der Übung

Aufgabe 1 Es sei $\delta \geq 2$ und $G = (V, E)$ ein Graph, so dass jeder Knoten $v \in V$ die Ungleichung $d(v) \geq \delta$ erfüllt. Zeigen Sie, dass G einen Kreis C der Länge $L(C) \geq \delta + 1$ besitzt.

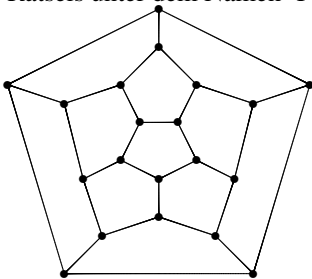
Aufgabe 2 An einem Fest bei Ehepaar Schmidt nehmen weitere n Ehepaare teil, $n \in \mathbb{N}_0$. Im Laufe des Abends geben sich einige der Anwesenden die Hand (wobei natürlich niemand seinem Ehepartner oder sich selbst die Hand gibt). Am Ende des Festes fragt Herr Schmidt alle anderen, wie vielen Leuten sie im Laufe des Abends die Hand geschüttelt haben. Alle Antworten, die er erhält, sind verschieden. Was ist die Antwort von Frau Schmidt?

Aufgabe 3 Sei G ein zusammenhängender Graph und W_1, W_2 zwei längste Wege in G . Zeigen Sie: $E(W_1) \cap E(W_2) \neq \emptyset$

Aufgabe 4

Finden Sie einen Hamiltonschen Kreis im 'Dodekaedergraphen'.

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde von Hamilton 1859 in Form eines Rätsels unter dem Namen 'Peter around the world' gestellt.



Aufgabe 5 Die folgende Tabelle gibt die Entfernungen (in Einheiten von 100 Meilen) zwischen den Flughäfen der Städte London, Mexico City, New York, Paris, Peking und Tokyo an.

	<i>L</i>	<i>MC</i>	<i>NY</i>	<i>Pa</i>	<i>Pe</i>	<i>T</i>
<i>L</i>	–	56	35	2	51	60
<i>MC</i>	56	–	21	57	78	70
<i>NY</i>	35	21	–	36	68	68
<i>Pa</i>	2	57	36	–	51	61
<i>Pe</i>	51	78	68	51	–	13
<i>T</i>	60	70	68	61	13	–

- a) Erstellen Sie ein Flugnetz minimaler Länge mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal.
- b) Erstellen Sie ein Flugnetz minimaler Länge mit Hilfe des Algorithmus von Prim.

Aufgabe 6 Man zeige, dass alle Alkohole der Form $C_jH_{2j+1}OH$ Baumstruktur haben.

Aufgabe 7 Es sei G ein semi-eulerscher Graph (d.h. G besitzt einen eulerschen Weg) wobei der Minimalgrad größer als 3 beträgt. Zeigen Sie, dass für die zyklomatische Zahl $\mu = m - n + \kappa$ gilt: $\mu \geq n$. Hierbei steht κ für die Anzahl der Komponenten des Graphen G .

Aufgabe 8 Angenommen es existieren zwei Wege W_1 und W_2 von a nach b , für die $E(W_1) \neq E(W_2)$ gilt. Zeigen Sie, dass ein Kreis C existiert mit $E(C) \subseteq E(W_1) \cup E(W_2)$.

Teil B: Aufgaben zur Abgabe in der Übung am 28.10.2009

Aufgabe 9 (4 Punkte) Beweisen Sie die folgende Aussage:

Ein zusammenhängender und nichttrivialer Multigraph G ist genau dann eulersch, wenn man ihn in kantendisjunkte Kreise zerlegen kann.

Aufgabe 10 (chinesischer Postbote) (4+1 Punkte)

Das folgende Problem stammt von Mei-KoKwan und betrifft einen Postboten, weswegen es heute allgemein als *chinese postman problem* bekannt ist:

Ein Postbote muss für ein gewisses (zusammenhängendes) Straßennetz die Post austragen (beginnend beim Postamt); natürlich will er dabei eine Route so wählen, dass er insgesamt eine möglichst kurze Strecke laufen will und am Ende wieder am Postamt ankommt.

- Modellieren Sie das Problem als kombinatorisches Optimierungsproblem.
 - Was fällt Ihnen auf, wenn Sie einen solchen Weg in einem eulerschen Graphen finden sollen?
-

Aufgabe 11 (6 Punkte) Gegeben Sei der Graph, der durch die Kantengewichte in der Datei Matrix.txt (siehe Homepage) gegeben ist. Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal ein Minimalgerüst und implementieren Sie dieses in Maple oder alternativ in C++. (Ihr Programm sollte die Matrix einlesen und am Ende ein Minimalgerüst als Ergebnis liefern).

Hinweis: Um auf Kreisfreiheit zu testen, betrachten Sie zuerst alle Knoten als einzelne Komponenten. Wird zwischen zwei Komponenten eine Kante hinzugefügt, verschmelzen diese. Wird in einer Komponente eine Kante hinzugefügt, erhält man einen Kreis.

Hinweis: Die folgende Aufgabe kann in Gruppen bis drei Personen abgegeben werden. Ziel ist die Ausarbeitung und Vorstellung einer Lösungsmethode/-ansatzes in der Globalübung am 04.11.2009.

Aufgabe 12 (8 Punkte) Die Datei Matrix.txt enthält die Distanzen zwischen 120 Städte im ehemaligen West-Deutschland (inkl. West-Berlin). Die Deutsche Telekom möchte ein längenminimales Netzwerk zwischen den Städten aufbauen. Dieses Netzwerk soll einen minimalm aufspannenden Baum enthalten. Zusätzlich soll es ausfallsicher sein, d. h. bei Ausfall einer Kante des aufspannenden Baums, soll noch immer eine Verbindung zwischen jedem Knotenpaar möglich sein. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der ein solches Netzwerk liefert. Zu Veranschaulichung der Lösung können Sie auch die Datei Koordinaten.txt verwenden, welche die Koordinaten der 120 Städte enthält (gleiche Reihenfolge wie in der Matrix). In der Übung am 04.11.2009 haben Sie 5 Minuten Zeit ihr Lösungsansatz und Lösung zu präsentieren.

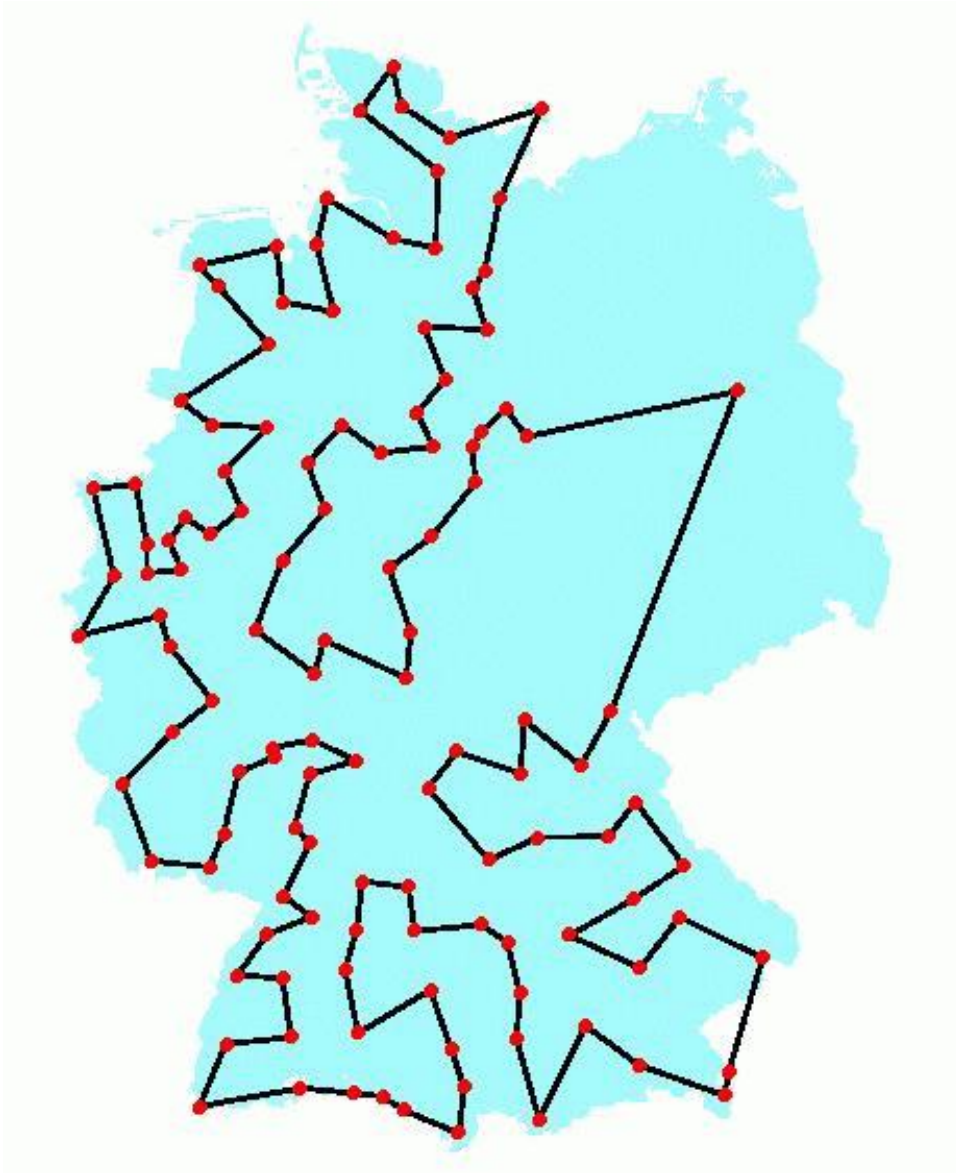


Abbildung 1: Ein Hamiltonischer Kreis minimaler Länge durch West-Deutschland (nur zur Illustration der Daten)