# 11. Übung Optimierung B

**Aufgabe 1.**
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Zeilen $a_j$, $j \in \{1, ..., m\}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.
(i) Zeigen Sie, dass jedes Stratum der Menge $M$ genau dann minimal ist, wenn die Zeilen $\{a_j \mid j \in J_0(x)\}$ den Zeilenraum von $A$ aufspannen. (Dabei definiert man zu einem Punkt $x \in M$ die Menge $J_0(x) = \{j \in \{1, ..., m\} \mid a_j^t x = b_j\}$ und das Stratum $\Sigma(x) = \{\tilde{x} \in M \mid J_0(x) = J_0(\tilde{x})\}$.)
(ii) Zeigen Sie, dass jedes minimale Stratum der Menge $M$ ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

**Aufgabe 2.** Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass dann unimodulare Matrizen $U \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ und $V \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ existieren, so dass

$$UAV = D = diag(d_1, ..., d_s, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$$

eine Diagonalmatrix ist mit Einträgen $d_i$ an Stelle $(i, i)$ für $1 \leq i \leq s$ und Nullen sonst. Dabei seien die $d_i > 0$ und für $1 \leq i \leq s - 1$ gelte $d_i$ teilt $d_{i+1}$.

**Aufgabe 3.** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass das System $Ax \leq b$ nicht TDI ist (betrachten Sie den Zielfunktionsvektor $c = (1, 0)^t$). Zeigen Sie außerdem, dass das System TDI wird, falls man noch die redundante Ungleichung $x_1 \leq 0$ zu $Ax \leq b$ hinzufügt.

**Aufgabe 4.** Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ und $Ax \leq b$ sei ein TDI System. Die Ungleichung $a^t x \leq \beta$ für $a \in \mathbb{Q}^n$ und $\beta \in \mathbb{Q}$ folge aus $Ax \leq b$. Zeigen Sie, dass dann das System $Ax \leq b$, $a^t x \leq \beta$ ebenfalls TDI ist.

**Aufgabe 5.** Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $a \in \mathbb{Z}^n$ und $\beta \in \mathbb{Q}$. Das System $Ax \leq b$, $a^t x \leq \beta$ sei TDI. Zeigen Sie, dass dann das System $Ax \leq b$, $a^t x = \beta$ ebenfalls TDI ist.