10. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ und I_m die Einheitsmatrix in $\mathbb{Z}^{m\times m}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
a) Wenn A vollständig unimodular ist, dann sind auch $-A$, A^t und $[I_m, A]$ vollständig unimodular.
b) Falls die Determinante jeder $m \times m$-Untermatrix von $[I_m, A]$ in der Menge $\{-1, 0, 1\}$ liegt, so ist A vollständig unimodular.

Aufgabe 2.
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und sei $A := (a_{ij})_{ij}$ seine Inzidenzmatrix, das heißt

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{Ecke } v_i \text{ ist inzident zu Kante } e_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass A genau dann vollständig unimodular ist, wenn G bipartit ist.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ genau dann vollständig unimodular ist, wenn für alle Vektoren $c, d \in \mathbb{Z}^n$ und alle Vektoren $a, b \in \mathbb{Z}^m$ jede Ecke des Polyeders $\{x \in \mathbb{R}^n | c \leq x \leq d, a \leq Ax \leq b\}$ ganzzahlig ist.
Hinweis:
1. Für eine vollständig unimodulare Matrix A zeige man, dass $(Id_n, -Id_n, A^T, -A^T)^T$ auch vollständig unimodular ist.
2. Für die andere Richtung benutze man den Satz von Hoffman und Kruskal mit $c = 0$. Finden Sie dann a und d so, dass jede Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x, Ax \leq b\}$ enthalten ist in der Menge der Ecken von $\{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x \leq d, a \leq Ax \leq b\}$.

Aufgabe 4.
Zeigen Sie (mit einem anderen Beweis als in der Vorlesung), dass jede doppelt stochastische $n \times n$-Matrix Konvexkombination von Permutationsmatrizen ist.
Beweisen Sie dazu mit Hilfe von Aufgabe 3, dass jede Ecke des Polyeders der doppelt stochastischen $n \times n$-Matrizen ganzzahlig ist.