9. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Stellen Sie zu folgenden linearen Optimierungsproblemen, die zugehörigen dualen Probleme auf. Dabei sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$:
a) $\max c^t x$ s. t. $Ax \leq b$, $x \geq 0$,
b) $\max c^t x$ s. t. $Ax \leq b$,
c) $\min c^t x$ s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$,
d) $\min c^t x$ s. t. $Ax = b$.

Aufgabe 2.
Gegeben sei das Minimum Cost Flow Problem (MCF) $\min c^t x$ s. t. $Bx = b$ und $0 \leq x \leq u$. Dabei ist B die Inzidenzmatrix des zugrunde liegenden Netzwerks $D = (V, A)$, $c \in \mathbb{R}^{|A|}$ der Zielfunktionsvektor, $b \in \mathbb{R}^{|V|}$ der Nachfrage- bzw. Verbrauchsvektor und $u \in (\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\})^{|A|}$ die Kapazitätsfunktion.
a) Zeigen Sie, dass das (MCF) genau dann eine nach unten beschränkte Zielfunktion hat, wenn es keinen gerichteten Kreis C im zugrunde liegenden Netzwerk $D = (V, A)$ gibt, dessen Bögen unbeschränkte Kapazität besitzen ($u_a = \infty$ für alle Bögen a des Kreises C) und bei dem die Summe $\sum\limits_{a \text{ Bogen von } C} c_a$ negativ ist.
b)Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^{|V|}$ das obige (MCF) äquivalent zum (MCF) mit dem Zielfunktionsvektor c^y ($c^y_{v,w} := c_{v,w} + y_w - y_v$) und ansonsten gleichen Nebenbedingungen ist. Äquivalent bedeutet dabei, dass ein Fluss x genau dann Lösung des ersten (MCF) ist, wenn er Lösung des zweiten Problems ist.
c)Jetzt wählt man $y \in \mathbb{R}^{|V|}$ so, dass der Vektor $(y, z)^t$ mit einem $z \in \mathbb{R}^{|A|}$ dual zulässig ist (das heißt, $(y, z)^t$ erfüllt die Nebenbedingungen des zum (MCF) dualen linearen Problems). Zeigen Sie, dass dann $c^y_{v,w} \geq 0$ auf allen Bögen (v, w) mit unbeschränkter Kapazität gilt.
d)Finden Sie eine Transformation des (MCF) in ein äquivalentes System (siehe Teil b)), die einen Bogen $a \in A$ mit negativen Kosten c_a und beschränkter Kapazitätsfunktion u_a in einen Bogen mit positiven Kosten und beschränkter Kapazität überführt.

Aufgabe 3.
Eine Intervall-Matrix ist eine 0-1-Matrix so, dass die 1-Einträge in jeder Zeile fortlaufend sind. Zeigen Sie, dass jede Intervall-Matrix vollständig unimodular ist.

Aufgabe 4.
Betrachten Sie das sogenannte Intervall-Packing Problem:
Gegeben seien eine Menge von Intervallen $[a_i, b_i]$ mit Gewichten c_i, wobei $i = 1, 2, \ldots, n$, und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht ist eine Teilmenge der Intervalle maximalen Gewichts so, dass kein Punkt in mehr als k der Intervalle enthalten ist.
(i) Formulieren Sie dieses Problem mit Hilfe von Aufgabe 3 als LP-Problem ohne Ganzzahligkeits-Nebenbedingungen.
(ii) Wie lautet das duale Problem?