8. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Beweisen Sie den Satz von Dilworth ohne den Satz von König direkt per Induktion nach $|P|$.
Hinweis: Zeigen Sie nur die nicht-triviale Ungleichung. Für den Induktionsschritt untersuchen Sie die folgenden zwei Fälle.
(i) Es gibt eine Antikette L maximaler Kardinalität, die weder alle maximalen noch alle minimalen Elemente von P enthält. In diesem Fall seien $I := L \cup \{p \in P |$ es ex. ein $q \in L$ mit $p \prec q\}$ und $F := L \cup \{p \in P |$ es ex. ein $q \in L$ mit $q \prec p\} = L \cup (P - I)$. Wenden Sie dann die Induktionsvoraussetzung auf I und F an.
(ii) Die einzigen Kandidaten für eine maximale Antikette in P sind die Mengen aller maximalen bzw. minimalen Elemente von P. Wählen Sie $p, q \in P$ so, dass p minimal und q maximal in P und $p \prec q$ ist und wenden Sie die Induktionsvoraussetzung dann auf $P - \{p, q\}$ an.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie den folgenden Satz von Erdös und Gallai.
Eine Folge $d := (d_1, ..., d_n)$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ ist genau dann graphisch (das heißt, d ist die Gradsequenz eines schlichten Graphen), wenn
$\sum\limits_{i=1}^{p} d_i \leq p(p-1) + \sum\limits_{i=p+1}^{n} \min\{p, d_i\}$ für alle $p \in \{1, ..., n\}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die graphischen Partitionen $(d_1, ..., d_n)$ von $2m = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ ein Ordnungsideal bezüglich der Dominanzordnung bilden.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie den folgenden Satz von Havel und Hakimi. Eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ ist genau dann Gradsequenz eines Graphen, wenn die Folge $d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_{d_n} - 1, d_{d_n+1}, d_{d_n+2}, \ldots, d_{n-1}$ Gradsequenz eines Graphen ist.
<u>Hinweis zu '$\Rightarrow$':</u> Es sei $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $d(x_i) = d_i$ für $1 \leq i \leq n$. Falls x_n nicht zu $x_1, x_2, \ldots, x_{d_n}$ adjazent ist, erzeugen Sie durch Kantenvertauschungen einen Graphen mit der gleichen Gradsequenz, in dem $\Gamma(x_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{d_n}\}$ gilt.

Aufgabe 4.
a) Ein *Multigraph* ist ein Graph, in dem mehrfache (d.h. parallele) Kanten zwischen Eckenpaaren zugelassen sind. Beweisen Sie: Eine Folge $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$ ganzer Zahlen ist genau dann durch einen Multigraphen realisierbar, wenn die Summe $\sum_{i=1}^{n} d_i$ gerade ist und $d_1 \leq d_2 + d_3 + \ldots + d_n$ gilt.
<u>Hinweis zu '$\Leftarrow$':</u> Vollständige Induktion nach $|V(G)|$. Unterscheiden Sie für $|V(G)| \geq 4$ die Fälle $d_1 - d_2 \geq d_n$, $0 < d_1 - d_2 < d_n$ und $d_1 - d_2 = 0$.
b) In einem Multigraphen G seien zusätzlich zu den Mehrfachkanten auch *Schlingen*, d.h. Kanten vv zwischen einer Ecke $v \in V(G)$ und sich selbst, zugelassen. Zeigen Sie, dass eine Folge $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ nichtnegativer ganzer Zahlen genau dann durch einen solchen Graphen realisierbar ist, wenn die Summe $\sum_{i=1}^{n} d_i$ gerade ist (dabei leistet jede Schlinge an einer Ecke v den Beitrag 2 zum Eckengrad von v).