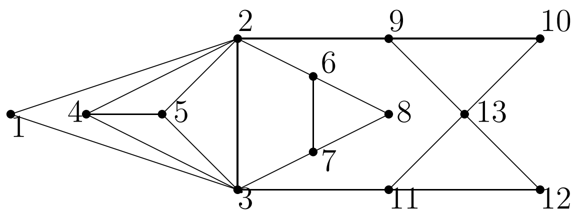
Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. E. Triesch
http://www.math2.rwth-aachen.de
SS 2007

7. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Edmonds Matching Algorithmus ein Maximum Matching des abgebildeten Graphen. (Sie können hierzu das Hilfsblatt zur Übung 7 verwenden.)



Aufgabe 2.
Sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph und $w : E \to \mathbb{Q}$ eine Kostenfunktion auf den Kanten. Nun wird ein Algorithmus auf G beschrieben, der ein maximales Matching mit minimalen Kosten liefern soll:

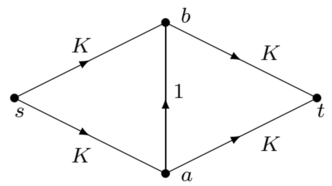
1. Man startet mit dem Matching $M := \emptyset$.

2. Für das Matching M betrachtet man den gerichteten Graphen D_M, den man aus G erhält, in dem man alle Kanten $e \notin M$ von U nach W orientiert mit der Längenfunktion $l(e) := w(e)$ und in dem man alle Kanten $e \in M$ von W nach U orientiert mit der Längenfunktion $l(e) := -w(e)$.

3. Nun seien U_1 bzw. W_1 die Teilmengen von U bzw. W, die nicht von M überdeckt werden. Falls es einen gerichteten $U_1 - W_1-$Weg gibt, so vergrößere man M zu $M := M \triangle E(P)$ ($\triangle$ bezeichnet die symmetrische Differenz), wobei $E(P)$ die Kantenmenge eines kürzesten gerichteten $U_1 - W_1-$Weg ist, und gehe zu b).
   Falls es keinen solchen Weg gibt: STOP.

Zeigen Sie: Dieser Algorithmus findet ein maximales Matching mit minimalen Kosten auf G.

Aufgabe 3.
Es sei $K \in \mathbb{N}$. Im abgebildeten Netzwerk (D, s, t) ist der maximale Wert eines Flusses offenbar $2K$. Zeigen Sie, dass der Ford-Fulkerson-Algorithmus bei einer ungünstigen Wahl der vergrößernden $s-t$-Wege auch $2K$ Schritte benötigt, um den Fluss x^* mit $val(x^*) = 2K$ zu finden.



Bitte wenden.

Aufgabe 4.
Es sei (D, s, t) ein Netzwerk mit Kapazitätsfunktion c. Zeigen Sie:

1. C ist genau dann ein minimaler Schnitt, wenn für einen maximalen Fluss x und jeden Bogen $a \neq (t, s)$ gilt, dass

$$x_a = \begin{cases} c_a & a = (u, v), u \in C, v \notin C \\ 0 & a = (v, u), u \in C, v \notin C \end{cases}$$

2. falls C und C' minimale Schnitte sind, dann auch $C \cup C'$ und $C \cap C'$, d.h. die Menge der minimalen Schnitte ist ein distributiver Verband

3. im Beweis des *Max-Flow Min-Cut Theorems* wird das minimale Element des Verbands der minimalen Schnitte konstruiert

Aufgabe 5.
Führen Sie den Ford-Fulkerson-Algorithmus für den abgebildeten Graphen durch. (Sie können hierzu das Hilfsblatt zur Übung 7 verwenden.):