Lehrstuhl II für Mathematik `http://www.math2.rwth-aachen.de`
Prof. Dr. E. Triesch **SS 2007**

4. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Permanente:
1. Die Permanente ist eine multilineare Abbildung in Zeilen und Spalten.
2. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und P, Q Permutationsmatrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$, dann gilt $\mathrm{Per}(A) = \mathrm{Per}(PAQ)$.
3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann gilt $\mathrm{Per}(A) = \mathrm{Per}(A^t)$.

Aufgabe 2.
Beweisen Sie das Analogon zur Laplace Entwicklung für die Permanente. Folgern Sie daraus Formeln für die Permanente von Blockdiagonalmatrizen und von Dreiecksmatrizen. Alternativ können Sie auch allgemeiner eine Formel für Blockdreiecksmatrizen beweisen.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass es im Allgemeinen unmöglich ist eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ zu finden, so dass $\mathrm{Per}(T(A)) = \det(A)$ gilt für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dabei soll es der Abbildung T nur erlaubt sein fest gewählte Einträge der abzubildenden Matrizen mit -1 zu multiplizieren.

Aufgabe 4.
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall die Äquivalenz der folgenden Aussagen für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} \geq 0$ für alle i, j:
(i)$\mathrm{Per}(A) = 0$.
(ii)Es existiert eine $k \times l$ Untermatrix von A mit $k + l > n$, die eine Nullmatrix ist.

Aufgabe 5.
Sei A eine doppelt stochastische $n\times n$ Matrix. Zeigen Sie, dass dann die Ungleichung $\mathrm{Per}(A) \leq 1$ gilt mit Gleichheit genau dann, wenn A eine Permutationsmatrix ist.