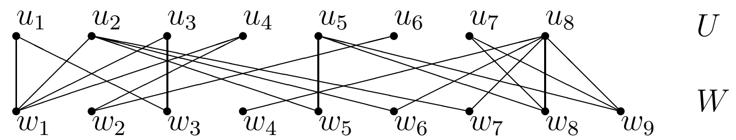
3. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Es sei G ein Graph und M^* ein gesättigtes Matching von G. Zeigen Sie die folgende Aussage: Ist M ein beliebiges Matching von G, so gilt $|M| \leq 2|M^*|$.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall:
(i) Ein bipartiter und r-regulärer Graph G (d.h. $deg(v) = r$ für alle Ecken v aus G) lässt sich in r kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen.
(ii) Ist G ein bipartiter Graph und r der maximale Eckengrad von G, so kann man G in r kantendisjunkte Matchings zerlegen.

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie im abgebildeten bipartiten Graphen $G = (U \cup W, E)$ ein Maximum Matching und eine Knotenüberdeckung minimaler Größe mit Hilfe der 'Ungarischen Methode'. Starten Sie mit dem Matching $M = \{u_5w_5\}$ und wählen Sie in Schritt (1.1) des Algorithmus stets denjenigen Knoten aus, der unter allen im vorigen Schritt neu markierten Knoten den kleinsten Index hat. Sie können zur Lösung das Hilfsblatt zur dritten Übung verwenden.



Aufgabe 4.
In einer Werbeagentur mit 5 Angestellten sind 5 Aufträge zu erledigen. Die Qualifikation des Mitarbeiters i für den Auftrag j sei durch die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

beschrieben (1: sehr gut ... 5: miserabel). Legen Sie zuerst Matrix A zugrunde und weisen Sie jedem Mitarbeiter genau einen Auftrag zu, so dass die Summe der Qualifikationskoeffizienten möglichst klein wird. Legen Sie dann Matrix B zugrunde und weisen Sie jedem Mitarbeiter genau einen Auftrag zu, so dass die Summe der Qualifikationskoeffizienten möglichst groß wird.

Aufgabe 5.
Für eine $n \times n$ Matrix A bezeichne $s(A)$ die Summe aller Einträge von A. Im Algorithmus für das Zuordnungsproblem mit einer $n \times n$ Kostenmatrix C habe der Graph G_k kein perfektes Matching für ein $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann $s(C^{(k+1)}) < s(C^{(k)})$ gilt.