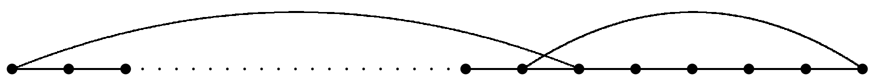
2. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Sei V eine Menge mit $|V| = n$. Zeigen Sie, dass es genau n^{n-2} Bäume gibt mit Eckenmenge V.
Hinweis: Prüfer Code.
Sei $V = \{v_1, ..., v_n\}$. Jedem Baum T auf V ordnen wir einen Vektor $(a_1, ..., a_{n-1})$ folgendermaßen zu:
1. a_1 sei der Nachbar der Ecke b_1 aus T vom Grad 1 mit kleinstem Index i.
2. a_2 sei der Nachbar der Ecke b_2 aus $T - b_1$ vom Grad 1 mit kleinstem Index i.
Allgemein:
Sind $a_1, ..., a_j, b_1, ..., b_j$ definiert, so sei a_{j+1} der Nachbar der Ecke b_{j+1} aus $T - \{b_1, ..., b_j\}$ vom Grad 1 mit kleinstem Index i.

Aufgabe 2.
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n = |V| \geq 3$ Knoten. Für jedes nichtadjazente Paar u, v von Knoten gelte $d(u) + d(v) \geq n$. Zeigen Sie, dass G einen Hamiltonschen Kreis besitzt.
Hinweis: Nehmen Sie an, die Aussage wäre falsch und wählen Sie ein Gegenbeispiel G mit maximaler Anzahl von Kanten. Betrachten Sie dann einen Weg maximaler Länge in G und die folgende Figur:



Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann bipartit ist, wenn alle Kreise in G gerade Länge haben.

Aufgabe 4.
Zeigen Sie die folgende Aussage:
Sei $G = (U \cup V, E)$ ein bipartiter Graph und seien M_1 und M_2 Matchings in G. Dann gibt es ein Matching $M \subset M_1 \cup M_2$ in G, das alle Ecken aus U überdeckt, die von M_1 überdeckt werden, und das alle Ecken aus V überdeckt, die von M_2 überdeckt werden.

Aufgabe 5.
Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall, dass $\nu(G) = |U| - \delta$, wobei $\delta = \max_{X \subset U} \{|X| - |\Gamma(X)|\}$.