Lehrstuhl II für Mathematik http://www.math2.rwth-aachen.de
Prof. Dr. E. Triesch **SS 2007**

1. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
(a) Sei G ein Graph mit Eckenmenge V. Zeigen Sie, dass es dann mindestens zwei Ecken mit gleichem Grad in V gibt.
(b) Angenommen der Graph G mit n Ecken besitzt genau die Grade $0, 1, ..., n-2$. Welchen Grad besitzen zwei der Ecken von G?

Aufgabe 2.
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n = |V| \geq 2$ Knoten. Zeigen Sie:
(a) Ist $|E| > \binom{n-1}{2}$, so ist G zusammenhängend.
(b) Diese Schranke ist optimal (Geben Sie für jedes n einen Graphen an, der $\binom{n-1}{2}$ Kanten besitzt und nicht zusammenhängend ist).

Aufgabe 3.
Es sei $\delta \geq 2$ und $G = (V, E)$ ein Graph, so dass jeder Knoten $v \in V$ die Ungleichung $d(v) \geq \delta$ erfüllt. Zeigen Sie, dass G einen Kreis C der Länge $L(C) \geq \delta + 1$ besitzt.

Aufgabe 4.
Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $|V| \geq 2$. Zeigen Sie, dass G einen Knoten $v \in V$ besitzt, so dass $G - v$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 5.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(a) Ein zusammenhängender Multigraph G ist genau dann eulersch, wenn alle seine Eckengrade gerade sind.
(b) Ein zusammenhängender Multigraph G ist genau dann eulersch, wenn man ihn in kantendisjunkte Kreise zerlegen kann.

Aufgabe 6.

Finden Sie einen Hamiltonschen Kreis im 'Dodekaedergraphen'.

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde von Hamilton 1859 in Form eines Rätsels unter dem Namen 'Peter around the world' gestellt.