8. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Zeigen Sie, dass eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ genau dann vollständig unimodular ist, wenn für alle Vektoren $c, d \in \mathbb{Z}^n$ und alle Vektoren $a, b \in \mathbb{Z}^m$ jede Ecke des Polyeders $\{x \in \mathbb{R}^n | c \leq x \leq d, a \leq Ax \leq b\}$ ganzzahlig ist.
Hinweis:
1. Für eine vollständig unimodulare Matrix A zeige man, dass $(Id_n, -Id_n, A^T, -A^T)^T$ auch vollständig unimodular ist.
2. Für die andere Richtung benutze man den Satz von Hoffman und Kruskal mit $c = 0$. Finden Sie dann a und d so, dass jede Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x, Ax \leq b\}$ enthalten ist in der Menge der Ecken von $\{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x \leq d, a \leq Ax \leq b\}$.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie (mit einem anderen Beweis als in der Vorlesung), dass jede doppelt stochastische $n \times n$-Matrix Konvexkombination von Permutationsmatrizen ist.
Beweisen Sie dazu mit Hilfe von Aufgabe 1, dass jede Ecke des Polyeders der doppelt stochastischen $n \times n$-Matrizen ganzzahlig ist.

Aufgabe 3.
Eine Intervall-Matrix ist eine 0-1-Matrix so, dass die 1-Einträge in jeder Zeile fortlaufend sind. Zeigen Sie, dass jede Intervall-Matrix vollständig unimodular ist.

Aufgabe 4.
Betrachten Sie das sogenannte Intervall-Packing Problem:
Gegeben seien eine Menge von Intervallen $[a_i, b_i]$ mit Gewichten c_i, wobei $i = 1, 2, \ldots, n$, und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht ist eine Teilmenge der Intervalle maximalen Gewichts so, dass kein Punkt in mehr als k der Intervalle enthalten ist.
(i) Formulieren Sie dieses Problem mit Hilfe von Aufgabe 3 als LP-Problem ohne Ganzzahligkeits-Nebenbedingungen.
(ii) Wie lautet das duale Problem?