

7. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.

- Es sei (D, s, t) ein Netzwerk mit Kapazitätsfunktion $c_a = 1$ für alle Bogen $a \in A$. Zeigen Sie:
- Ist x ein maximaler Fluß, so ist die Flußstärke $val(x)$ gleich der maximalen Anzahl p der bogendisjunkten $(s - t)$ -Wege.
 - Ist C ein minimaler Schnitt, so ist die Kapazität $cap(C)$ gleich der minimalen Anzahl von Bogen, deren Streichung alle $(s - t)$ -Wege zerstört.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie die folgenden Sätze von Menger (1927) mit Hilfe von Aufgabe 1.

- Es sei $D = (V, A)$ ein Netzwerk und $u, v \in V$ seien zwei verschiedene Ecken von D . Dann ist die maximale Anzahl p der bogendisjunkten $(u - v)$ -Wege gleich der minimalen Anzahl q von Bogen, deren Streichung alle $(u - v)$ -Wege zerstört.
- Formulieren und beweisen Sie die 'ungerichtete Version' von Teil (a).

Aufgabe 3.

Zeigen Sie die folgenden Sätze von Menger (1927) mit Hilfe von Aufgabe 2.

- Es sei $D = (V, A)$ ein Netzwerk und $u, v \in V$ seien zwei verschiedene Ecken von D , die nicht durch einen Bogen (u, v) verbunden sind. Dann ist die maximale Anzahl p von eckendisjunkten $(u - v)$ -Wegen gleich der minimalen Anzahl q von Ecken, deren Herausnahme aus D alle $(u - v)$ -Wege zerstört.
- Formulieren und beweisen Sie die 'ungerichtete Version' von Teil (a).

Hinweis zu (a): Wenden Sie Aufgabe 2 auf das wie folgt konstruierte Netzwerk $D' = (V', A')$ an.

- Die Bogen (x, u) und (v, y) werden aus D entfernt (warum?).
- Jede Ecke $x \notin \{u, v\}$ wird durch zwei neue Ecken x' und x'' ersetzt, die durch einen Bogen (x', x'') verbunden sind.
- Jeder Bogen (u, x) bzw. (y, v) aus D wird durch einen Bogen (u, x') bzw. (y'', v) in D' ersetzt.
- Jeder Bogen (x, y) mit $x, y \notin \{u, v\}$ aus D wird durch einen Bogen (x'', y') in D' ersetzt.