6. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Es sei $(H, \prec)$ eine endliche, halbgeordnete Menge. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente einer längsten Kette in H gleich der minimalen Anzahl von Antiketten ist, in die H zerlegt werden kann.

Aufgabe 2.
(a) Es sei X eine n-elementige Menge, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ der Potenzmengenverband von X und L eine Antikette in $(\mathcal{P}(X), \subset)$. Mit a_k sei die Anzahl der Elemente der Größe k in L bezeichnet. Zeigen Sie die LYM-Ungleichung (benannt nach Lubell, Yamamoto, Meshalkin):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

(b) Folgern Sie aus Teil (a) den Satz von Sperner (1928): Die maximale Kardinalität einer Antikette in $(\mathcal{P}(X), \subset)$ ist $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Hinweis zu (a): Bestimmen Sie für $A \in \mathcal{P}(X)$ die Anzahl der maximalen Ketten, die A enthalten.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie den folgenden Satz von Havel und Hakimi. Eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ ist genau dann Gradsequenz eines Graphen, wenn die Folge $d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_{d_n} - 1, d_{d_n+1}, d_{d_n+2}, \ldots, d_{n-1}$ Gradsequenz eines Graphen ist.
Hinweis zu '$\Rightarrow$': Es sei $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $d(x_i) = d_i$ für $1 \leq i \leq n$. Falls x_n nicht zu $x_1, x_2, \ldots, x_{d_n}$ adjazent ist, erzeugen Sie durch Kantenvertauschungen einen Graphen mit der gleichen Gradsequenz, in dem $\Gamma(x_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{d_n}\}$ gilt.

Aufgabe 4.
Ein *Multigraph* ist ein Graph, in dem mehrfache (d.h. parallele) Kanten zwischen Eckenpaaren zugelassen sind. Beweisen Sie: Eine Folge $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$ ganzer Zahlen ist genau dann durch einen Multigraphen realisierbar, wenn die Summe $\sum_{i=1}^{n} d_i$ gerade ist und $d_1 \leq d_2 + d_3 + \ldots + d_n$ gilt.
Hinweis zu '$\Leftarrow$': Vollständige Induktion nach $|V(G)|$. Unterscheiden Sie für $|V(G)| \geq 4$ die Fälle $d_1 - d_2 \geq d_n$, $0 < d_1 - d_2 < d_n$ und $d_1 - d_2 = 0$.

Aufgabe 5.
In einem Multigraphen G (vgl. Aufgabe 4) seien zusätzlich zu den Mehrfachkanten auch *Schlingen*, d.h. Kanten vv zwischen einer Ecke $v \in V(G)$ und sich selbst, zugelassen. Zeigen Sie, dass eine Folge $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ nichtnegativer ganzer Zahlen genau dann durch einen solchen Graphen realisierbar ist, wenn die Summe $\sum_{i=1}^{n} d_i$ gerade ist (dabei leistet jede Schlinge an einer Ecke v den Beitrag 2 zum Eckengrad von v).