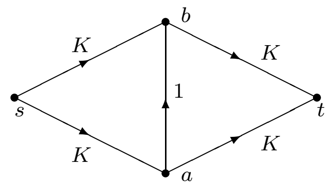
5. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Es sei $K \in \mathbb{N}$. Im abgebildeten Netzwerk (D, s, t) ist der maximale Wert eines Flusses offenbar $2K$. Zeigen Sie, dass der Ford-Fulkerson-Algorithmus bei einer ungünstigen Wahl der vergrößernden $s-t$-Wege auch $2K$ Schritte benötigt, um den Fluss x^* mit $val(x^*) = 2K$ zu finden.



Aufgabe 2.
Es sei (D, s, t) ein Netzwerk mit Kapazitätsfunktion c. Zeigen Sie:

1. C ist genau dann ein minimaler Schnitt, wenn für einen maximalen Fluss x und jeden Bogen $a \neq (t, s)$ gilt, dass
$$x_a = \begin{cases} c_a & a = (u, v), u \in C, v \notin C \\ 0 & a = (v, u), u \in C, v \notin C \end{cases}$$
2. falls C und C' minimale Schnitte sind, dann auch $C \cup C'$ und $C \cap C'$, d.h. die Menge der minimalen Schnitte ist ein distributiver Verband
3. im Beweis des *Max-Flow Min-Cut Theorems* wird das minimale Element des Verbands der minimalen Schnitte konstruiert

Aufgabe 3.
Beweisen Sie den Satz von Dilworth ohne den Satz von König direkt per Induktion nach $|P|$.
Hinweis: Zeigen Sie nur die nicht-triviale Ungleichung. Für den Induktionsschritt untersuchen Sie die folgenden zwei Fälle.
(i) Es gibt eine Antikette L maximaler Kardinalität, die weder alle maximalen noch alle minimalen Elemente von P enthält. In diesem Fall seien
$$I = L \cup \{p \in P| \text{ es existiert ein } q \in L \text{ mit } p \prec q\}$$
$$F = L \cup \{p \in P| \text{ es existiert ein } q \in L \text{ mit } q \prec p\} = L \cup (P - I).$$
Wenden Sie dann die Induktionsvoraussetzung auf I und F an.
(ii) Die einzigen Kandidaten für eine maximale Antikette in P sind die Mengen aller maximalen bzw. minimalen Elemente von P. Wählen Sie $p, q \in P$ so, dass p minimal und q maximal in P und $p \prec q$ ist und wenden Sie die Induktionsvoraussetzung dann auf $P - \{p, q\}$ an.

Aufgabe 4.
Angenommen, es sind $N = nm + 1$ verschiedene Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ von links nach rechts an eine Tafel geschrieben. Zeigen Sie, dass einige Zahlen so weggewischt werden können, dass
- entweder $n + 1$ Zahlen $a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ mit $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$ und $a_{i_0} < a_{i_1} < \ldots < a_{i_n}$
- oder $m + 1$ Zahlen $a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ mit $j_0 < j_1 < \ldots < j_m$ und $a_{j_0} > a_{j_1} > \ldots > a_{j_m}$
übrigbleiben.
Hinweis: Es sei $P = \{a_0, a_1 \ldots, a_{N-1}\}$ mit $a_i \prec a_j \Leftrightarrow (a_i < a_j \text{ und } i < j)$. Wenden Sie dann den Satz von Dilworth an.