

4. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.

Der Graph $G = (V, E)$ sei ν -saturiert, d.h. es gilt $\nu(G + e) > \nu(G)$ für jede Kante $e \in \binom{V}{2} \setminus E$. Beschreiben Sie möglichst genau die Struktur von G .

Hinweis: Verwenden Sie den Gallai-Edmonds-Struktursatz.

Aufgabe 2.

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $A_G \neq \emptyset$ (alle Bezeichnungen sind wie im Gallai-Edmonds-Struktursatz gewählt). Der bipartite Graph $H = (U \cup W, F)$ sei wie folgt definiert: $U = A_G$, die Knoten in W entsprechen bijektiv den Komponenten von $G[D_G]$ und $uw \in F$ genau dann, wenn $u \in U = A_G$ mit der w entsprechenden Komponente in G verbunden ist. Zeigen Sie, dass dann $|\Gamma_H(S)| > |S|$ für alle $S \subseteq U$, $S \neq \emptyset$ gilt.

Aufgabe 3.

(a) Es sei $k \geq 1$, $G = (V, E)$ ein k -zusammenhängender Graph ohne perfektes Matching und $D_G \neq V$ (alle Bezeichnungen wie im Gallai-Edmonds-Struktursatz). Zeigen Sie:

- (i) $\nu(G) \geq k$
- (ii) $\tau(G) \leq 2\nu(G) - k$

(b) Konstruieren Sie für jedes $k \geq 2$ einen k -zusammenhängenden Graphen ohne perfektes Matching, der (i) und (ii) nicht erfüllt, und für $k = 1$ einen zusammenhängenden Graphen ohne perfektes Matching, der (ii) nicht erfüllt.

Aufgabe 4.

(a) Es sei $G = (V, E)$ ein 3-regulärer und 2-fach kantenzusammenhängender Graph (d.h. $d(v) = 3 \forall v \in V$ und $G - e$ zusammenhängend $\forall e \in E$). Zeigen Sie den Satz von Petersen (1891): G besitzt ein perfektes Matching.

(b) Konstruieren Sie einen 3-regulären Graphen, der kein perfektes Matching besitzt.

Hinweis zu (a): Satz von Tutte. Ist $S \subseteq V$, $\emptyset \neq S \neq V$ und C eine ungerade Komponente von $G \setminus S$, so gibt es mindestens zwei $S - C$ Kanten, d.h. Kanten mit einem Endpunkt in S und einem Endpunkt in C . Zeigen Sie, dass es sogar drei $S - C$ Kanten gibt.

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Edmonds Matching Algorithmus ein Maximum Matching des abgebildeten Graphen.

