3. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W und $|U \cup W| \geq 4$. Zeigen Sie als weitere Verallgemeinerung des Satzes von Hall, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:
(i) G ist zusammenhängend und jede Kante $e \in E$ liegt in einem perfekten Matching von G
(ii) $|U| = |W|$ und $|\Gamma(A)| > |A|$ für alle $A \subseteq U$ mit $\emptyset \neq A \neq U$
(iii) $G \setminus \{u, w\}$ hat ein perfektes Matching für alle $u \in U$ und alle $w \in W$

Aufgabe 2.
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall:
(i) Ein bipartiter und r-regulärer Graph G lässt sich in r kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen.
(ii) Ist G ein bipartiter Graph und r der maximale Eckengrad von G, so kann man G in r kantendisjunkte Matchings zerlegen.

Aufgabe 3.
Es sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Ferner seien durch $U, Ug_1, Ug_2, \ldots, Ug_k$ und $U, h_1U, h_2U, \ldots, h_kU$ die Recht- bzw. Linksnebenklassen der Gruppe G nach U gegeben. Zeigen Sie, dass ein gemeinsames Repräsentantensystem für die Rechts- und Linksnebenklassen existiert (d.h. eine Teilmenge $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ von G, so dass $\{Ua_0, Ua_1, \ldots, Ua_k\} = \{U, Ug_1, Ug_2, \ldots, Ug_k\}$ und $\{a_0U, a_1U, \ldots, a_kU\} = \{U, h_1U, h_2U, \ldots, h_kU\}$).
<u>Hinweis:</u> Wenden Sie den Satz von Hall auf einen geeigneten bipartiten Graphen an.

Aufgabe 4.
Lösen Sie das Zuordnungsproblem für die beiden folgenden Kostenmatrizen C:

$$(a)\;\; C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 9 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\;\; C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 11 & 4 \\ 9 & 7 & 6 & 11 & 3 \\ 12 & 9 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 11 & 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.
Für eine $n \times n$ Matrix A bezeichne $s(A)$ die Summe aller Einträge von A. Im Algorithmus für das Zuordnungsproblem mit einer $n \times n$ Kostenmatrix C habe der Graph G_k kein perfektes Matching für ein $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann $s(C^{(k+1)}) < s(C^{(k)})$ gilt.