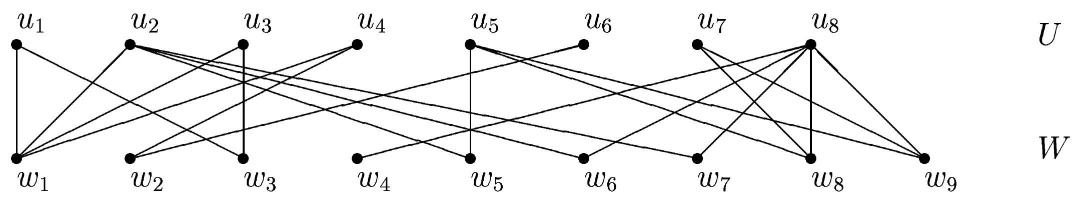
Lehrstuhl II für Mathematik http://www.math2.rwth-aachen.de
Prof. Dr. E. Triesch **WS 2004/2005**

2. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie im abgebildeten bipartiten Graphen $G = (U \cup W, E)$ ein Maximum Matching und eine Knotenüberdeckung minimaler Größe mit Hilfe der 'Ungarischen Methode'. Starten Sie mit dem Matching $M = \{u_5 w_5\}$ und wählen Sie in Schritt (1.1) des Algorithmus stets denjenigen Knoten aus, der unter allen im vorigen Schritt neu markierten Knoten den kleinsten Index hat.



Aufgabe 2.
Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W. In G sei die Hall-Bedingung erfüllt und für jedes $u \in U$ gelte $d(u) = |\Gamma(u)| \geq r > 0$. Zeigen Sie als quantitative Verallgemeinerung des Satzes von Hall: Im Fall $r \leq |U|$ gibt es in G mindestens $r!$ verschiedene Matchings der Größe $|U|$ und im Fall $r > |U|$ mindestens $\frac{r!}{(r-|U|)!}$ solcher Matchings.
Hinweis: Induktion nach $|U|$. Eine Teilmenge A von U heißt kritisch, falls $|A| = |\Gamma(A)|$. Wenn es keine von $\emptyset$ und U verschiedene kritische Teilmenge von U gibt, so wählen Sie für ein $\hat{u} \in U$ einen beliebigen Matchingpartner $\hat{w} \in W$ aus. Was gilt dann für $G' := G \setminus \{\hat{u}, \hat{w}\}$? Ist $A_0 \subseteq U$ kritisch und $\emptyset \neq A_0 \neq U$, so betrachten Sie die von $A_0 \cup \Gamma(A_0)$ bzw. $(U \setminus A_0) \cup (W \setminus \Gamma(A_0))$ induzierten Teilgraphen von G.

Aufgabe 3.
Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall, dass $\nu(G) = |U| - \delta$, wobei $\delta = \max_{X \subset U} \{|X| - |\Gamma(X)|\}$.

Aufgabe 4.
(a) Es sei $m \leq n$ und A eine $m \times n$ Matrix mit Einträgen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$, wobei jede Zahl höchstens einmal in jeder Zeile und höchstens einmal in jeder Spalte vorkommt (A heißt auch Lateinisches Rechteck). Zeigen Sie, dass sich jedes $m \times n$ Lateinische Rechteck zu einem $n \times n$ Lateinischen Quadrat erweitern lässt.
(b) Geben Sie eine partiell definierte $n \times n$ Matrix mit n Einträgen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ an, die nicht zu einem Lateinischen Quadrat ergänzt werden kann.
Hinweis zu (a): Bestimmen Sie eine weitere Zeile, indem Sie den Satz von Hall auf einen geeigneten bipartiten Graphen anwenden.

Aufgabe 5.
Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann bipartit ist, wenn alle Kreise in G gerade Länge haben.