

1. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.

An einem Fest bei Ehepaar Schmidt nehmen weitere n Ehepaare teil, $n \in \mathbb{N}_0$. Im Laufe des Abends geben sich einige der Anwesenden die Hand (wobei natürlich niemand seinem Ehepartner oder sich selbst die Hand gibt). Am Ende des Festes fragt Herr Schmidt alle anderen, wie vielen Leuten sie im Laufe des Abends die Hand geschüttelt haben. Alle Antworten, die er erhält, sind verschieden. Was ist die Antwort von Frau Schmidt?

Aufgabe 2.

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n = |V| \geq 2$ Knoten. Zeigen Sie:

(a) Ist $|E| > \binom{n-1}{2}$, so ist G zusammenhängend.

(b) Diese Schranke ist optimal (Geben Sie für jedes n einen Graphen an, der $\binom{n-1}{2}$ Kanten besitzt und nicht zusammenhängend ist).

Aufgabe 3.

Es sei $\delta \geq 2$ und $G = (V, E)$ ein Graph, so dass jeder Knoten $v \in V$ die Ungleichung $d(v) \geq \delta$ erfüllt. Zeigen Sie, dass G einen Kreis C der Länge $L(C) \geq \delta + 1$ besitzt.

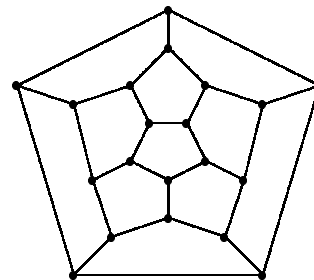
Aufgabe 4.

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $|V| \geq 2$. Zeigen Sie, dass G einen Knoten $v \in V$ besitzt, so dass $G - v$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 5.

Finden Sie einen Hamiltonschen Kreis im 'Dodekaedergraphen'.

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde von Hamilton 1859 in Form eines Rätsels unter dem Namen 'Peter around the world' gestellt.



Aufgabe 6.

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n = |V| \geq 3$ Knoten. Für jedes nichtadjazente Paar u, v von Knoten gelte $d(u) + d(v) \geq n$. Zeigen Sie, dass G einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

Hinweis: Nehmen Sie an, die Aussage wäre falsch und wählen Sie ein Gegenbeispiel G mit maximaler Anzahl von Kanten. Betrachten Sie dann einen Weg maximaler Länge in G und die folgende Figur:

