Lehrstuhl II für Mathematik http://www.math2.rwth-aachen.de
Prof. Dr. E. Triesch **WS 2005/06**

13. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Folgen, rekursiv definierte Folgen

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie, falls möglich, den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) $a_n = \dfrac{n^2+7n-3}{2n^2-5n+6}$; b)* $a_n = \dfrac{3n^3-1}{4n^2+2}$; c)* $a_n = \dfrac{n+1}{2n^2+1}$.

Lösung: a) $a = \frac{1}{2}$; b) nicht konvergent; c) $a = 0$.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und geben Sie ein $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < 10^{-3}$ für $n > N$ gilt; hierbei ist $a_n =$

a) $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}$; b)* $\dfrac{1}{4^n}$; c)* $\dfrac{\sqrt[3]{n}\sin n}{\sqrt{n+1}}$; d)* $\dfrac{6n-2}{3n+7}$.

Lösung: a) $a = 0,\ N = 62$; b) $a = 0,\ N = 4$; c) $a = 0,\ N = 10^{18}$; d) $a = 2,\ N = 5331$.

Aufgabe 3. (Sandwich-Lemma)
Gegeben seien drei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle n mit $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existiert und den Wert a hat.

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie, soweit möglich, den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; dabei ist $a_n =$

a) $\dfrac{n}{3^n}$; b)* $\dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$; c)* $(\frac{1}{3}\sqrt{3})^n$; d)* $\dfrac{n^2}{4^n}$; e)* $\cos\ n\pi$;
f)* $\sin\ n\pi$; g)* $\dfrac{2^n}{n!}$; h)* $\dfrac{4}{n} + \dfrac{2^n}{n!}$; i)* $2 + \dfrac{\cos n\pi}{n^2+1}$; j)* $\dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$;
k)* $n - \sqrt[3]{n^3-1}$; l)* $\dfrac{n!}{n^n}$; m)* $\dfrac{\sqrt{n^6+n^4}-n^3}{2n^2-1}$; n)* $\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}\dbinom{n}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

Lösung: a) $a = 0$; b) $a = \sqrt{2}$; c) $a = 0$; d) $a = 0$; e) nicht konvergent;
f) $a = 0$; g) $a = 0$; h) $a = 0$; i) $a = 2$; j) $a = \frac{1}{3}$; k) $a = 0$;
l) $a = 0$; m) $a = 0$; n) nicht konvergent.

Aufgabe 5. Zeigen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^m} = 1,\ m \in \mathbb{N}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+1} = 1$;
d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3(3^n+5)} = 3$;

Aufgabe 6.
Zeigen Sie durch Anwendung des Satzes über monotone und beschränkte Folgen, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert a.

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n^2 + 1$

b)* $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}\sqrt{a_n^2 + 1}$

c) $a_1 = 2R,\ a_{n+1} = \dfrac{R \cdot a_n}{R + a_n} + R,\ R > 0$

d)* $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$

e)* $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

f)* $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{7 + 3a_n}{3 + a_n}$

g)* $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{4}(\sqrt{a_n^2 + 4} - a_n)$

Lösung:
b) $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ d) $a = 1$ e) $a = 2$ f) $a = \sqrt{7}$ g) $a = 0$