12. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Hauptachsentransformation, symmetrische Matrizen, Quadriken im $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 1. Bestimmen Sie zur jeweils gegebenen Matrix A eine orthogonale Matrix P, d.h. $P^TP = E_3$, so dass P^TAP eine Diagonalmatrix ist.

i)* $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 13 & 4 & 4 \\ 4 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 19 \end{pmatrix}$ ii)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ iii)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ iv) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 19 & -8 & -8 \\ -8 & 19 & -8 \\ -8 & -8 & 19 \end{pmatrix}$

Lösungen:

i) $P = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$ ii) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ iii) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.* Bestimmen Sie für die Matrix A aus Aufgabe 1 ii) alle Potenzen A^k für $k \in \mathbb{N}$.

Lösung: $A^k = \begin{pmatrix} -(-2)^{k-1} + 3^{k-1} + 6^{k-1} & -3^{k-1} + 2\cdot 6^{k-1} & (-2)^{k-1} + 3^{k-1} + 6^{k-1} \\ -3^{k-1} + 2\cdot 6^{k-1} & 3^{k-1} + 4\cdot 6^{k-1} & -3^{k-1} + 2\cdot 6^{k-1} \\ (-2)^{k-1} + 3^{k-1} + 6^{k-1} & -3^{k-1} + 2\cdot 6^{k-1} & -(-2)^{k-1} + 3^{k-1} + 6^{k-1} \end{pmatrix}$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie zur jeweils gegebenen Matrix A die Matrix $\sqrt{A}$ mit der Eigenschaft, dass $\sqrt{A}\cdot\sqrt{A} = A$.

a)* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 19 & -8 & -8 \\ -8 & 19 & -8 \\ -8 & -8 & 19 \end{pmatrix}$ c)* $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 13 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 13 \end{pmatrix}$

Lösungen:

a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4. Gegeben sei für $t \in \mathbb{R}$ die symmetrische Matrix $A(t) = \begin{pmatrix} 1+4t & 2(t-1) \\ 2(t-1) & t+4 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ und eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{v_1(t), v_2(t)\}$ aus Eigenvektoren von $A(t)$.

b)* Stellen Sie den Vektor $x_0 = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination der Eigenvektoren der Matrix $A(0)$ dar.

c) Ermitteln Sie die Normalform der Gleichung

$$(1+4t)x_1^2 + 4(t-1)x_1x_2 + (t+4)x_2^2 = 5.$$

Welche Kurven im $\mathbb{R}^2$ werden für $t \in \{1, \frac{1}{4}, -1, 0\}$ durch diese Gleichungen beschrieben?

Aufgabe 5.* Bestimmen Sie die Normalform (NF), den Typ (T) und die Lage (Skizze!) der folgenden Kurven im $\mathbb{R}^2$.

a) $-17x_1^2 + 7x_2^2 + 18x_1x_2 = 20$ b) $-x_1^2 + 11x_2^2 - 16x_1x_2 = 10$

c) $2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 = 36$ d) $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = 5$

e) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = c,\ c \in \mathbb{R}$ f) $6x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 = 0$

g) $3x_1^2 - 4x_1x_2 = 0$

Lösung:

a) NF: $10u_1^2 - 20u_2^2 = 20$; T: Hyperbel b) NF: $15u_1^2 - 5u_2^2 = 10$; T: Hyperbel

c) NF: $6u_1^2 + u_2^2 = 36$; T: Ellipse d) NF: $5u_1^2 = 5$; T: paralleles Geradenpaar

e) NF: $2u_1^2 = c$; T: $c > 0$: paralleles Geradenpaar, $c = 0$: Doppelgerade, $c < 0$: leere Menge

f) NF: $8u_1^2 + 4u_2^2 = 0$; T: Ein Punkt $(0, 0)$

g) NF: $4u_1^2 - u_2^2 = 0$; T: Geradenpaar mit Schnitt in $(0, 0)$