11. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Cramersche Regel, Orientierung, Inverse einer Matrix, Eigenwerte, Eigenvektoren

Aufgabe 1. Lösen Sie, falls möglich, mit Hilfe der Cramerschen Regel die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\begin{aligned} x+\quad 2z&=1\\ 2x+y+3z&=0\\ y-3z&=0\end{aligned}$ b)* $\begin{aligned} 2x-\ y+3z&=5\\ -x+5y+2z&=3\\ 3x-4y+7z&=1\end{aligned}$ c)* $\begin{aligned} 2x+\quad z&=1\\ 4x+y+7z&=5\\ 6x+\quad 3z&=3\end{aligned}$ d)* $\begin{aligned} x-y+2z&=3\\ 2x-y+\ z&=0\end{aligned}$

Lösung: a) $\begin{pmatrix} 3\\ -3\\ -1\end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 183\\ 73\\ -31\end{pmatrix}$, c),d) mit Cramerscher Regel nicht lösbar.

Aufgabe 2. Berechnen Sie, falls möglich, die Inversen der folgenden Matrizen mit Hilfe der Determinantenrechnung.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 10\end{pmatrix}$ c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

d)* $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10\\ 5 & -1 & 8\\ 4 & -4 & 3\end{pmatrix}$ e)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ f)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0 & -1\\ 4 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 2\\ 6 & 8 & -4\\ -5 & -3 & 7\end{pmatrix}$ b) nicht invertierbar c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -8 & -5\\ -10 & 10 & 10\\ 7 & -4 & -5\end{pmatrix}$

d) nicht invertierbar e) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ f) $\frac{1}{31}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 & -3\\ 16 & 12 & -10 & -9\\ -8 & -6 & 5 & 20\\ 22 & 1 & -6 & -24\end{pmatrix}$

Aufgabe 3. Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\ 3\\ 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad M(\mathcal{E}_3, g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

a) Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{E}_3$ gleich orientiert?
b) Bestimmen Sie die Determinante von g, d.h. $\det M(\mathcal{C}, g, \mathcal{C})$ für eine beliebige Basis $\mathcal{C}$ des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Eigenwerte über $\mathbb{C}$ der folgenden Matrizen und eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

a)* $\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & t\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ für $t = 3, -1, -2$ c)* $\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ d)* $\begin{pmatrix} -8 & 3\\ -18 & 7\end{pmatrix}$

e)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ g)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ h)* $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i)* $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j)* $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ k)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ l)* $\begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ m)* $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Lösungen:
a) $\lambda_{1,2} = \pm i,\ v_{1,2} = (\pm i, 1)^T$
b) $t = 3:\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1,\ v_1 = (3,1)^T,\ v_2 = (1,-1)^T;\ t = -1:\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$
$v_{1,2} = (1,1)^T;\ t = -2:\ \lambda_{1,2} = 1 \pm i,\ v_1 = (1+i, 1)^T,\ v_2 = \overline{v}_1$
c) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1,\ v_1 = (1,-1)^T,\ v_2 = (1,1)^T$
d) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2,\ v_1 = (1,3)^T,\ v_2 = (1,2)^T$
e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0,\ v_{1,2} = (1,0,0)^T,\ v_3 = (-1,1,0)^T$
f) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \pm i,\ v_1 = (1,0,-2)^T,\ v_{2,3} = (0, \pm i, 1)^T$
g) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3,\ v_1 = (1,1,1)^T,\ v_2 = (1,2,4)^T,\ v_3 = (1,3,9)^T$
h) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2,\ v_1 = (0,0,1)^T,\ v_2 = (2,1,0)^T,\ v_3 = (2,-1,0)$
i) $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i,\ v_1 = (0,1,1)^T,\ v_{2,3} = (-1 \pm i, \pm i, -1)^T$
j) $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5,\ v_1 = (2,-1,0)^T,\ v_2 = (3,0,1)^T,\ v_3 = (1,2,-1)^T$
k) $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm i,\ v_1 = (0,1,0)^T,\ v_2 = (-i/3, 7i, -1)^T,\ v_3 = \overline{v}_2$
l) $\lambda_1 = \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 6,\ v_1 = (1,-1,0)^T,\ v_2 = (1,0,-1)^T,\ v_3 = (1,1,1)^T$
m) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2,\ v_{1,2,3} = (1,-1,1)^T$

Information: Die Diskussionsstunde am Donnerstag, den 19.1.2006, von 10.00h-11.30h fällt aus.

5. Hausaufgabe:(10 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq -1.$$

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A_α.
(ii) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren von A für $\alpha = 0$ und für $\alpha = -1$.
Abgabe bis Mittwoch, den 1. Februar 2006, 16.00 Uhr, Einwurfkasten SG.
Rückgabe ab Mittwoch, den 8. Februar 2006, 16.00 Uhr, gegenüber dem Einwurfkasten SG.