

10. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Determinanten

Aufgabe 1. a) Berechnen Sie das Signum $\text{sgn}(\sigma)$ der Permutation

$$(i) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 8 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad (ii)^* \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 3 & 6 & 7 & 2 & 9 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

als $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)}$.

Lösung: a) (ii) $\text{sgn}(\sigma) = 1$

Aufgabe 2. Berechnen Sie sowohl mit dem Entwicklungssatz als auch mit dem Gaußverfahren die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$a)^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad b)^* \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad d)^* \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: a) 0 b) -1 c) -39 d) -186

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & \pi & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & -10 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 8 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b)^* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & -4 & 4 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & 17 & -13 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$c)^* \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -4 & -9 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung: a) -39 b) 0 c) 13580

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Determinante $\det A_n$ für die gegebene $(n \times n)$ -Matrix A_n mit den Matrixelementen a_{ik} ($1 \leq i, k \leq n$)

a) $a_{ik} = \min\{i, k\}$ b)* $a_{ik} = (i - 1)n + k$

$$c)^* a_{ik} = \begin{cases} 2 & , \text{ falls } 1 \leq i = k \leq n \\ 1 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

(Hinweis zu c): Addieren Sie im ersten Schritt die Zeilen 2, 3, ..., n zu der ersten Zeile.)

Lösung: a) 1 b) $n = 1 : 1, n = 2 : -2, n \geq 3 : 0$ c) $n + 1$

Information: Die Diplom-Vorprüfung HM I findet am Samstag, den 25.02.06, von 09.00 - 10.30 Uhr statt. Die genauen Informationen finden Sie unter

www.math2.rwth-aachen.de/~uebung/HM/VORDIPLOM/vordiplom.html