9. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Skalarprodukt, Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren, affine Abbildungen, Drehungen und Spiegelungen in der Ebene

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle Vektoren $a \in \mathbb{R}^3$ mit $|a| = \sqrt{10}$ und $\angle(a, e_1) = \frac{\pi}{4}$, $\angle(a, e_3) \leq \frac{\pi}{2}$, deren Projektion in die $y, z-$Ebene mit e_2 den Winkel $\frac{\pi}{6}$ bildet.

Aufgabe 2.* Gegeben ist der Vektor $b = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie alle Vektoren

a) $c \in \mathbb{R}^3$ der Länge 2 mit $\angle(c, e_2) = \frac{\pi}{3}$ und $c \perp b$.
b) $a \in \mathbb{R}^3$ mit $a \perp b,\ a \perp (e_1 + e_2),\ |a| = \sqrt{8}$.

Lösung: a) $c = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$, b) $a = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.* Gegeben ist der Vektor $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $< (x-a), (x-a) > = 6$ (2) $< x, a > = 4$ (3) $\alpha = \angle(x, e_3) = \frac{5\pi}{6}$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $|x|$ aus (1) und (2), indem Sie ausmultiplizieren.

Lösung: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass sich alle Höhen eines Dreiecks im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ sich in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 5. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren aus den jeweils gegebenen Vektoren ein orthonormiertes System.

i) $\begin{pmatrix} 6 \\ -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ii)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ iii)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungen: i) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

ii) $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die Darsellungsmatrix $M(\mathcal{E}_3, f, \mathcal{E}_3)$ einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$, so dass $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $g(x) = M(\mathcal{E}_3, f, \mathcal{E}_3) \cdot x + c$ eine affine Abbildung ist mit der Eigenschaft, dass $g(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$, wobei

a) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b)* $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: a) $M(\mathcal{E}_3, f, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $M(\mathcal{E}_3, f, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$,
$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.
a) Stellen Sie die Drehung in der Ebene um den Punkt $z = (1,1)^T$ um den Winkel α als affine Abbildung dar.
b) Stellen Sie die Spiegelung in der Ebene an der Geraden $g = \left\{(1,t)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ als affine Abbildung dar.
c) Stellen Sie die Verknüpfung zweier Drehungen um die Punkte $z, z' \in \mathbb{R}^2$ um die Winkel α, β als affine Abbildung dar.
d) Stellen Sie die Verknüpfung zweier Spiegelungen an den Geraden g_1 und g_2 als affine Abbildung dar.
e) Welche geometrische Transformation wird durch $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben?