8. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Lineare Abbildungen, Basiswechsel, Inverse einer Matrix

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_m\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^m$ und $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann bezeichne $M(\mathcal{B}, L, \mathcal{A})$ die Darstellungsmatrix bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ des Definitionsraums und $\mathcal{B}$ des Zielraums.
Berechnen Sie für die folgenden eindeutig bestimmten linearen Abbildungen
i) $M(\mathcal{B}, L, \mathcal{A})$ ii) Basis von $\mathrm{Ker}(L)$ iii) Basis von $\mathrm{Bild}(L)$
iv) Lösungsmenge von $\mathrm{L}(x) = b_1 + ... + b_m$.

a)* $n = 2,\ m = 3,\ L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ L(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$\mathcal{A} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\}, \qquad \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\}.$$

b) $n = 3, m = 4,\ L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, L(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, L(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$\mathcal{A} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}, \qquad \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Lösung: a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2. Gegeben sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $L\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ und die Basis $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Bestimmen Sie
a) die Darstellungsmatrix $M(\mathcal{E}_3, L, \mathcal{B})$.
b) die Basiswechselmatrix $M(\mathcal{B}, \mathrm{id}, \mathcal{E}_3)$.
c) die Matrix $M(\mathcal{E}_3, L, \mathcal{E}_3)$.

Aufgabe 3.* Es seien $\mathcal{A} = \{a^1, a^2, a^3\}$, $\mathcal{E}_3 = \{e^1, e^2, e^3\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{C} = \{c^1, c^2, c^3, c^4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$, wobei
$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$c^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ c^2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ c^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ c^4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ferner seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ und $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zwei lineare Abbildungen definiert durch $f(a^1) = (4,2,2,0)^T$, $f(a^2) = (0,1,0,-1)^T$, $f(a^3) = (3,1,0,0)^T$ und $g(c^1) = (0,1,0)^T$, $g(c^2) = (1,2,0)^T$, $g(c^3) = (1,1,1)^T$, $g(c^4) = (-1,0,-1)^T$.

(a) Berechnen Sie $M(\mathcal{C}, f, \mathcal{A})$, $M(\mathcal{E}_3, g, \mathcal{C})$ und $M(\mathcal{E}_3, g \circ f, \mathcal{A})$

(b) Wieso ist die Funktion $g \circ f$ invertierbar? Berechnen Sie $M(\mathcal{A}, (g \circ f)^{-1}, \mathcal{E}_3)$.

(c) Berechnen Sie den Kern von g.

Aufgabe 4.*

Es sei V der Vektorraum aller reellen Polynome $p(x) = \sum_{j=0}^{3} \alpha_j x^j$, $(\alpha_j \in \mathbb{R})$ vom Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ und $W = \mathbb{R}^4$ versehen mit der Standardbasis $\mathcal{E}_4 = \{e^1, e^2, e^3, e^4\}$. Die lineare Abbildung $\Phi : V \to W$ sei definiert durch $\Phi(p) = (p(-1), p(1), p(2), p(3))^T$.

(a) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren unter der Abbildung Φ, also $\Phi(1)$, $\Phi(x)$, $\Phi(x^2)$ und $\Phi(x^3)$ und bestimmen Sie die zu Φ zugehörige Matrix $A = M(\mathcal{E}_4, \Phi, \mathcal{B})$ (vgl. Aufg.3).

(b) Zeigen Sie, daß A invertierbar ist und berechnen Sie die Inverse A^{-1}.

(c) Welche $p \in V$ erfüllen $\Phi(p) = (-11, -5, -5, 1)^T$?

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen mit Hilfe des Gaußverfahrens:

a) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\3 & 2 & 1\\4 & 2 & -1\end{pmatrix}$ b)* $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ c)* $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\2 & -1 & 0 & 2\\4 & 2 & 3 & 0\\0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ d)* $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\2 & 2 & 7\\1 & -1 & 4\end{pmatrix}$

Lösung:

b) $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\\2 & -2 & -3\end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{31}\begin{pmatrix}-5 & 4 & 7 & -3\\22 & 1 & -6 & -24\\-8 & -6 & 5 & 20\\16 & 12 & -10 & -9\end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}15 & -7 & 1\\-1 & 1 & -1\\-4 & 2 & 0\end{pmatrix}$

4. Hausaufgabe: (10 Punkte) Gegeben sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$L\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad L\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L\left(\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

und die Basis $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$. Bestimmen Sie

a) die Darstellungsmatrix $M(\mathcal{E}_3, L, \mathcal{B})$,

b) die Basiswechselmatrix $M(\mathcal{B}, \mathrm{id}, \mathcal{E}_3)$,

c) die Matrix $M(\mathcal{E}_3, L, \mathcal{E}_3)$.

Abgabe bis Mittwoch, den 11. Januar 2006, 16.00 Uhr, Einwurfkasten SG, Foyer, im Erdgeschoss.