Lehrstuhl II für Mathematik `http://www.math2.rwth-aachen.de`
Prof. Dr. E. Triesch **WS 2005/06**

7. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Lineare Abbildungen, Matrizenrechnung, affine Geometrie

Aufgabe 1.*

a) Sei $ABCD$ ein Parallelogramm im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.Zeigen Sie: Die Diagonalen des Parallelogramms halbieren sich .

b) Sei ABC ein Dreieck im $\mathbb{R}^3$, dessen Winkel kleiner als 120 Grad sind. Bestimmen Sie den Punkt X, so dass die Summe der Längen $XA + XB + XC$ minimal wird.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Teilmenge $B := \{q_0, q_1, \ldots, q_s\}$ an Punkten aus dem $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie eine maximal affin unabhängige Teilmenge von B.

a)* $s = 3$, $n = 4$: $q_0 = (3, -4, 1, 6)^T$, $q_1 = (3, -2, -10, 0)^T$, $q_2 = (2, 0, -3, 2)^T$, $q_3 = (1, 2, 4, 4)^T$

b) $s = n = 3$: $q_0 = (1, 1, 1)^T$, $q_1 = (3, 2, 4)^T$, $q_2 = (2, 1, -1)^T$, $q_3 = (4, 2, 2)^T$

c)* $s = n = 3$: $q_0 = (1, 1, 1)^T$, $q_1 = (1, 2, 2)^T$, $q_2 = (2, 3, 4)^T$, $q_3 = (2, 5, 6)^T$

d)* $s = n = 4$: $q_0 = (1, 1, 1, 1)^T$, $q_1 = (3, 0, 4, 1)^T$, $q_2 = (1, 2, 1, -1)^T$, $q_3 = (4, 1, 2, 5)^T$, $q_4 = (6, -1, 3, 4)^T$

e)* $s = n = 4$: $q_0 = (1, 1, 1, 1)^T$, $q_1 = (3, 1, 2, 4)^T$, $q_2 = (1, 2, 3, 4)^T$, $q_3 = (2, 0, 1, 1)^T$, $q_4 = (1, -1, 0, 1)^T$

Aufgabe 3.*

Sei V der Vektorraum aller reellen Polynome $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{3} \alpha_j x^j$ $(\alpha_j \in \mathbb{R})$ vom Grad ≤ 3 und $W = \mathbb{R}^4$. Die Abbildung $\Phi : V \to W$ sei definiert durch

$$\Phi(p) = (p(-1)p(1)p(2)p(3))^T .$$

Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 4.

Sei $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (siehe auch Übung 5, Aufgabe 1). Welche der folgenden Abbildungen $\Phi : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sind linear?

a) $(\Phi(f))(n) = f(n + 1)$, b) $(\Phi(f))(n) = |f(n)|$, c)* $(\Phi(f))(n) = nf(n + 1)$,
d)* $(\Phi(f))(n) = n^2 f(n + 1)$, e)* $(\Phi(f))(n) = f(n + 1) - f(n)$, f)* $(\Phi(f))(n) = f(n)f(n + 1)$

Lösung: a) ja, b) nein, c) ja, , d) ja, e) ja, f) nein

Aufgabe 5.* Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie geeignete Dimensionen n und m, so dass obige Matrizen Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist.

b) Berechnen Sie (falls möglich): $AC, BA, AA, AB, BB, BC, DC, (AB)C, A(BC)$.

c) Berechnen Sie D^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: a) $A : n = 3, m = 2,\ B : n = 3, m = 3,\ C : n = 1, m = 3\ ,\ D : n = 5, m = 5$
b) $AC = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$. BA, AA, DC nicht möglich.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}, BB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 12 & 13 & 28 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 23 \\ -3 \end{pmatrix},$$

c) $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
D^n ist die Nullmatrix für $n \geq 5$.

Aufgabe 6. Elemente eines Vektorraums V haben abhängig von der zugrundeliegenden Basis verschiedene Darstellungen.
a) Stellen Sie die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^2$, die bzgl. $\mathcal{E}_2$ gegeben sind, in der Basis $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ dar. Deren Elemente sind ebenfalls bzgl. $\mathcal{E}_2$ gegeben:
$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix},\qquad \mathcal{A} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$
b) Sei $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dargestellt in $\mathcal{A}$, d.h. $v = \alpha a_1 + \beta a_2$. Welche Vektoren dargestellt in $\mathcal{A}$ (aus Teil a)) entsprechen in der Basis $\mathcal{E}_2$ den Einheitsvektoren e_1 bzw. e_2?

Aufgabe 7.
Sei $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^3$ gegeben bzgl. der Standardbasis $\mathcal{E}_3$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung gegeben durch $f(a_1) = c_1$ und $f(a_2) = c_2$. Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung gegeben durch $M := M(\mathcal{A}, g, \mathcal{E}_3)$. Berechnen Sie $M(\mathcal{A}, g \circ f, \mathcal{A})$
a) $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -19 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b)* $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8. Sei $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_m\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^m$ und $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann bezeichne $M(\mathcal{B}, L, \mathcal{A})$ die Darstellungsmatrix bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ des Definitionsraums und $\mathcal{B}$ des Zielraums. Berechnen Sie für die folgenden eindeutig bestimmten linearen Abbildungen $M(\mathcal{B}, L, \mathcal{A})$
a) $n = m = 2,\ L(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{E}_2.$
b)* $n = m = 2,\ L(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ L(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{E}_2.$
c)* $n = 3, m = 2,\ L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, L(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathcal{A} = \mathcal{E}_3,\ \mathcal{B} = \mathcal{E}_2.$
Lösung: a) $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$