Lehrstuhl II für Mathematik http://www.math2.rwth-aachen.de
Prof. Dr. E. Triesch **WS 2005/06**

6. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Lineare Gleichungssysteme, Gaußverfahren

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußverfahrens:

a)
$$\begin{aligned} 2x_1+4x_2+2x_3-2x_4&=5\\ x_1+2x_2+4x_3&=4\\ -2x_1-4x_2-10x_3+3x_4&=-9\\ 4x_1+8x_2-10x_3-8x_4&=3\\ 2x_1+4x_2+4x_3-4x_4&=6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1+4x_2+2x_3-2x_4&=0\\ x_1+2x_2+4x_3&=0\\ -2x_1-4x_2-10x_3+3x_4&=1\\ 4x_1+8x_2-10x_3-8x_4&=0\\ 2x_1+4x_2+4x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$$

c)*
$$\begin{aligned} x_1+3x_2-4x_3+3x_4&=9\\ 3x_1+9x_2-2x_3-11x_4&=-3\\ 4x_1+12x_2-6x_3-8x_4&=6\\ 2x_1+6x_2+2x_3-14x_4&=-12 \end{aligned}$$

d)*
$$\begin{aligned} 5x_1-6x_2&=-1\\ -2x_1+3x_2&=-1\\ -6x_1-6x_2&=-4 \end{aligned}$$

e)*
$$\begin{aligned} 5x_1+7x_2+15x_3&=6\\ x_1+2x_2+4x_3&=4\\ 2x_1+3x_2+7x_3&=5 \end{aligned}$$

f)*
$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=1\\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4&=5\\ -2x_1+4x_2+2x_4&=-2 \end{aligned}$$

g)*
$$\begin{aligned} (1-i)z_1+(3+i)z_2&=1\\ (-3+i)z_1+(-5-5i)z_2&=2+i \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} (1-2i)z_1-2iz_2&=3-2i\\ (2+i)z_1+(1-i)z_2&=3+2i \end{aligned}$$

Lösung:
c) Rang 2, $\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\\0\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}5\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$; f) Rang 3, $\begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\\1\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$;
d) Rang 2, keine Lösung; e) Rang 3, $\begin{pmatrix}-7\\1/2\\5/2\end{pmatrix}$; g) Rang 1, keine Lösung; h) Rang 2, $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie mit Hilfe des Gaußverfahrens die Lösbarkeit der folgenden Gleichungssysteme (mit $\mu\in\mathbb{R}$) und geben Sie jeweils alle Lösungen an.

a)*
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ -x_1+2x_3&=2\\ 3x_1+2x_2&=\mu \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_2-x_3+2x_4&=6\\ 2x_1-x_2+3x_3&=-4\\ \mu x_1+x_3&=-1\\ 3x_1-x_2+4x_3&=-5 \end{aligned}$$

c)*
$$\begin{aligned} x_1+x_2+3x_3&=2\\ 2x_1+2x_2+7x_3&=5\\ \mu^2x_1+\mu x_2+4x_3&=4 \end{aligned}$$

Lösung: a) Nur für $\mu=0$ lösbar, Lösung: $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ c) Für $\mu=1$ unlösbar;
Lösung für $\mu=0$: $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$; für $0\neq\mu\neq1$: $\begin{pmatrix}-1/(1-\mu)\\ \mu/(1-\mu)\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Lösbarkeit der folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußverfahrens und interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch als Schnitt von Geraden in der Ebene bzw. als Schnitt von Ebenen im Raum (in Teil f) und h) seien $\mu,\nu\in\mathbb{R}$).

a)*
$$\begin{aligned} 2x-2y&=1\\ x+y&=2 \end{aligned}$$

b)*
$$\begin{aligned} x+y&=1\\ -x-y&=-2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x+y-2z&=6\\ 2x+2y+2z&=6 \end{aligned}$$

d)*
$$\begin{aligned} x+2y-3z&=1\\ -2x-4y+6z&=4 \end{aligned}$$

e)*
$$\begin{aligned} x+2y&=2\\ 3x+4y&=8\\ x-y&=1 \end{aligned}$$

f)*
$$\begin{aligned} x+\mu y+2z&=1\\ 4x+2y+2\mu z&=-2\\ x+2\nu y+2z&=3 \end{aligned}$$

g)*
$$\begin{aligned} x-2y+z&=6\\ 3x-5y+5z&=12\\ x-y+3z&=6 \end{aligned}$$

h)*
$$\begin{aligned} x+2y-3z&=1\\ 3x+7y+z&=2\\ -2x-4y+\mu z&=4 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3: a) zwei Geraden schneiden sich im Punkt $\begin{pmatrix}5/4\\3/4\end{pmatrix}$; b) zwei parallele Geraden (keine Lösung); c) Gerade als Schnitt zweier Ebenen; d) zwei parallele Ebenen; e) keine Lösung; f) $2\nu=\mu$: keine Lösung (parallele Ebenen); $(\mu,\nu)=(4,\frac{13}{3})$: Gerade als Schnitt dreier Ebenen; $\mu = 4$ und $\nu \neq \frac{13}{3}$: keine Lösung (falls $\nu = \frac{1}{4}$: parallele Ebenen, andernfalls schneiden sich je zwei Ebenen in verschiedenen, zueinander parallelen Geraden); $2\nu \neq \mu$ und $\mu \neq 4$: Punkt als Schnitt dreier Ebenen; g) je zwei Ebenen schneiden sich in verschiedenen zueinander parallelen Geraden (keine Lösung); h) $\mu = 6$: zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander, keine Lösung; $\mu \neq 6$: Punkt als Schnitt von drei Ebenen.

Aufgabe 4.* (Der Adventskalender)
Wie viele der folgenden 4 Vektoren des $\mathbb{R}^6$ sind linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Aussage.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Lösung: 2

Aufgabe 5.*
Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind, und bestimmen Sie eine Basis des von ihnen aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{R}^n$.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 6.*
a) Sie stehen auf dem Markt vor einem Obststand: 4 kg Bananen, 1 kg Äpfel, 2 kg Birnen und 3 kg Orangen kosten zusammen 28 Euro. 1 kg Bananen, 3 kg Birnen und 1 kg Orangen kosten zusammen 14 Euro. Wenn Sie 2 kg Äpfel und 4 kg Birnen kaufen, bezahlen Sie 20 Euro. Wählen Sie dagegen 2 kg Bananen, 2 kg Äpfel und 1 kg Orangen, so müssen Sie 16 Euro bezahlen. Was kostet aber nun jeweils 1 kg der vier Obstsorten?
b) An einem anderen Stand gibt es Tomaten, Paprika und Zwiebeln. Der Verkäufer ist Hobby-Mathematiker und sagt zu Ihnen: „Für ein $\mu \geq 0$ nenne ich Ihnen die Preise $p_1, p_2(\mu), p_3(\mu)$ für die folgenden drei Einkäufe: (1) 1 kg Tomaten, 2 kg Paprika und 5 kg Zwiebeln, (2) μ kg Paprika und 2 kg Zwiebeln und (3) μ kg Tomaten und 1 kg Zwiebeln. Wenn Sie mir sagen, für welche Werte $\mu \geq 0$ diese Angaben eindeutig die jeweiligen Kilogrammpreise festlegen, erlasse ich Ihnen 5 Euro.“ Sie wollen Geld sparen; berechnen Sie also alle Werte $\mu \geq 0$, die der Bedingung des Verkäufers genügen.
c) Es sei nun $\mu = 1$, $p_1 = 23$ und $p_2(1) = 9$. Welchen Wert muss dann $p_3(1)$ haben, damit es überhaupt eine Lösung in Aufgabenteil b) gibt?
Lösung: a) Preise/kg in Euro: x_1(Ba)=3, x_2(Ä)=4, x_3(Bi)=3, x_4(Or)=2 b) $\mu \notin \{0, 1\}$
c) $p_3(1) = 5$

---

3. Hausaufgabe: (10 Punkte) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abgabe bis Mittwoch, den 14. Dezember, 16.00 Uhr, Einwurfkasten SG, Foyer, im Erdgeschoss.