Lehrstuhl II für Mathematik http://www.math2.rwth-aachen.de
Prof. Dr. E. Triesch **WS 2005/06**

5. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Vektorraum, Untervektorraum, Lineare Unabhängigkeit, Basen, Interpolationspolynom

Aufgabe 1.
Es bezeichne $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Für $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ seien die Funktionen $f+g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und $\alpha f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ punktweise definiert, d.h. $(f+g)(n) := f(n)+g(n)$ und $(\alpha f)(n) := \alpha f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $B := \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists \gamma \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq \gamma\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ist.

c)* Für $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$
betrachten wir die folgende *Rekursion der Länge* 2:
$f(n+2) - f(n+1) - f(n) = 0 \quad (*)$
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{L} := \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \mid f \text{ erfüllt } (*) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$ der Lösungen von $(*)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ ist.
Gilt für $f \in \mathcal{L}$, dass $f(0) = f(1) = 1$, so sind die Werte von f genau die Fibonacci-Zahlen.

d)* In der Situation von Teil c) sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms
$p(z) = z^2 - z - 1$
Zeigen Sie, dass $f_\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ mit $f_\lambda(n) := \lambda^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ein Element von $\mathcal{L}$ ist.

Aufgabe 2.*
Es seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume des Vektorraums V (über $\mathbb{R}$). Zeigen Sie:

a) $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von V.

b) $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum von V.

Hinweis zu b): Betrachten Sie z.B. die beiden Geraden $U_i = \{\lambda e_i \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ für $i = 1, 2$ mit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3.*
Zeigen Sie, dass in einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ das Vektorsystem $\{u, v, w\}$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $\{u+v, v+w, u+w\}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 4.
Es seien die Mengen $M_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $M_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $M_3 = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ und $M_4 = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Elemente von M_1, M_2 und M_3 linear unabhängig sind, jedoch die Elemente von M_4 linear abhängig sind. Dies zeigt insbesondere, dass aus der paarweisen linearen Unabhängigkeit nicht die allgemeine lineare Unabhängigkeit folgt.

Aufgabe 5.
Welche der folgenden Vektorsysteme bilden eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{P}_n$ der reellen Polynome vom Grad $\leq n$? Beachten Sie, dass $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$ ist.

a) $\{1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+x+\cdots+x^n\}$

b) $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$ mit $p_j(x) = \prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \dfrac{x-x_i}{x_j-x_i}$
für paarweise verschiedene, gegebene x_k $(0 \leq k \leq n)$

c)* $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ für $n \geq 3$ ungerade und
$b_i = x^i + x^{n-i}$, falls $i \leq \dfrac{n-1}{2}$ sowie $b_i = x^i + x^{i-\frac{n+1}{2}}$, falls $i \geq \dfrac{n+1}{2}$

d)* $\{1, x-1, x^2-x, \ldots, x^n - x^{n-1}\}$

e)* $\{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$, falls $n = 2$

f)* $\{1+x, x+x^2, \ldots, x^{n-1}+x^n\}$

Lösung: a) ja, b) ja, c) nein, d) ja, e) ja, f) nein
Hinweis zu c): Versuchen Sie, die Vektoren geeignet linear zu kombinieren, so dass Sie einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit erhalten.

Aufgabe 6.
Bestimmen Sie dasjenige Polynom P vom Grad $\leq n$, welches durch die gegebenen Punkte (x, y) verläuft, d.h. $(x, y) = (x, P(x))$. Verwenden Sie dabei die Basis aus Aufgabe 5 b) und beachten Sie, dass $p_i(x_j) = 1$ für $i = j$ und $p_i(x_j) = 0$ für $i \neq j$ gilt.

a)* $n = 4$, $(0,0)$ $(1,6)$ $(2,40)$ $(-1,-2)$ $(-2,0)$
b) $n = 3$, $(0,1)$ $(1,1)$ $(2,7)$ $(-1,1)$
c)* $n = 3$, $(0,-2)$ $(1,-3)$ $(4,6)$ $(5,13)$
d)* $n = 3$, $(0,1)$ $(1,1)$ $(2,1)$ $(3,1)$

Lösung: a) $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x$ b) $p(x) = x^3 - x + 1$ c) $p(x) = x^2 - 2x - 2$
d) $p(x) = 1$