4. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Mengen in $\mathbb{C}$, Wurzelziehen im Komplexen, Moivre-Formel, Zerlegung reeller Polynome

Aufgabe 1. Bestimmen und skizzieren Sie die durch folgende Bedingungen festgelegten Teilmengen $M \subseteq \mathbb{C}$.

a) $|\arg(2z)| \geq \frac{\pi}{4}$ und $|z+1| > |z+3|$
b)* $|z-i| \leq |z-2+i|$ und $|\arg(z+2)| < \frac{\pi}{4}$
c)* $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$ und $2\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im\ z} < 1$
d) $|\arg(1+z)| < \frac{\pi}{3}$ und $|\arg(1-z)| < \frac{\pi}{3}$
e)* $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg(z-i) \leq -\frac{\pi}{4}$ und $2|\mathrm{Im}\ z| \leq 1$
f)* $|z-1| \leq \mathrm{Im}\, z + 1$
g)* $i(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}) < \frac{1}{\mathrm{Im\ z}}$ (Im $z \neq 0$)

Lösung:
a) $M = \{x+iy \mid x < -2\}$
b) $y > -2-x,\ y \geq x-1,\ y < x+2$
c) Dreieck, Ecken: $0, 1-i,\ (1+i)/3,$ d) Rhombus, Ecken: $\pm 1,\ \pm i\sqrt{3}$
e) Trapez, Ecken: $(\pm 1 + i)/2,\ (\pm 3 - i)/2$
f) Parabelbereich: $y \geq (x-1)^2/2 - 1/2$
g) Winkelbereiche: $(y < |x|$ und $y > 0)$ oder $(y < -|x|$ und $y < 0)$

Aufgabe 2. Berechnen Sie alle Wurzeln der nachstehenden Gleichungen und fertigen Sie jeweils eine Skizze an:

a)* $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$
b)* $z^2 = 4i$
c)* $z^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$
d)* $z^4 = 1 + i\ \tan\alpha$ mit $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$
e)* $z^6 = 1$
f)* $z^4 = -16$
g) $(z-3i)^3 = 29\frac{3-5i}{2-5i} - 31 + 22i$
h)* $z^3 + 2 = 2i$
i)* $z^2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$

Lösung:
a) $z_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}i(\sqrt{6}-\sqrt{2}),\ z_1 = -z_0,\ z_2 = iz_0,\ z_3 = -iz_0$
b) $z_0 = \sqrt{2}(1+i),\ z_1 = -z_0$
c) $z_0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})i,\ z_1 = -\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + i\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),\ z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$
d) $z_k = \frac{1}{\sqrt[4]{\cos\alpha}}[\cos(\frac{\alpha+2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\alpha+2k\pi}{4})]\ k = 0,1,2,3$
e) $z_0 = 1,\ z_1 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),\ z_2 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\ z_3 = -z_0,\ z_4 = -z_1,\ z_5 = -z_2$
f) $z_0 = \sqrt{2}(1+i),\ z_1 = \sqrt{2}(-1+i),\ z_2 = -z_0,\ z_3 = -z_1$
g) $z_0 = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+3i),\ z_1 = \frac{3}{2}(-\sqrt{3}+3i),\ z_2 = 0$
h) $z_0 = 1+i,\ z_1 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)),\ z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1-i(1+\sqrt{3}))$
i) $z_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i),\ z_1 = -z_0$

Aufgabe 3.* Bestimmen Sie die Imaginärteile aller komplexen Zahlen w, für die gilt:

$$(1+\sqrt{3}i)(w+\sqrt{5}+i)^4 = -32$$

Lösung: $0,\ \sqrt{3}-1,\ -2,\ -(1+\sqrt{3})$

Aufgabe 4. Berechnen Sie Re z und Im z für

a) $z = \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10}$ b)* $z = (\frac{1-i}{1+i})^{10}$ c)* $z = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{20}$

d)* $z = \left(\frac{\sqrt{3}+i\,3\sqrt{3}}{2+i}\right)^{15}$ e)* $z = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{6i}\right)^{1991}$ f)* $z = \left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2(1+i)}\right)^{60}$

Lösung:

a) Re $z = -\frac{1}{2}$, Im $z = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) Re $z = -1$, Im $z = 0$ c) Re $z = -\frac{1}{2}$, Im $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) Re $z = \sqrt{3}\,6^7$, Im $z = -\sqrt{3}\,6^7$ e) Re $z = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,3^{-1991}$, Im $z = -\frac{1}{2}\,3^{-1991}$

f) Re $z = -1$, Im $z = 0$

Aufgabe 5. Zerlegen Sie die folgenden Polynome in reelle Polynome kleinstmöglichen Grades

a)* $x^3 - x^2 + x - 1$ b)* $x^3 - x^2 + 2$ c)* $x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 4x - 6$

d)* $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ e) $x^4 + 4x + 3$ f)* $x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x$

Lösung:

a) $(x-1)(x^2+1)$ b) $(x+1)((x-1)^2+1)$ c) $(x+1)(x-1)[(x-2)^2+2]$

d) $(x-1)(x^2+1)^2$ e) $(x+1)^2[(x-1)^2+2]$ f) $x(x-2)^2(x+3)$

Information: Einige bekannte Kurven in der Ebene

Seien $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$ fest gewählt. Dann beschreiben die Werte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die die folgenden Gleichungen erfüllen, bekannte Kurven im $\mathbb{R}^2$.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	Kreis mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	Hyperbel
$y = ax^2 + bx + c$	Parabel

2. Hausaufgabe:

1) (5 Punkte) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$, für die

$$\mathrm{Re}(1 + \frac{1}{z}) \leq \frac{3}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{z} - \frac{2}{z + \bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}} > 0$$

gilt.

2) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt: $\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4 = -18 + i\,18\sqrt{3}$.

Abgabe bis Mittwoch, den 30. November, 16.00 Uhr, Einwurfkasten SG, Foyer, im Erdgeschoss.