

3. Übung Höhere Mathematik I

Themen: Rechnen mit komplexen Zahlen, Mengen in \mathbb{C} .

$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$																					
Wichtige Werte von $e^{i\varphi}$:	Einige Eigenschaften von $e^{i\varphi}$:																				
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>φ</th> <th>$e^{i\varphi}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\pi/12$</td> <td style="text-align: center;">$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\pi/6$</td> <td style="text-align: center;">$\sqrt{3}/2 + i/2$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\pi/4$</td> <td style="text-align: center;">$1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\pi/3$</td> <td style="text-align: center;">$1/2 + i\sqrt{3}/2$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$5\pi/12$</td> <td style="text-align: center;">$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\pi/2$</td> <td style="text-align: center;">i</td> </tr> </tbody> </table>	φ	$e^{i\varphi}$	0	1	$\pi/12$	$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2 + i/2$	$\pi/4$	$1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$	$\pi/3$	$1/2 + i\sqrt{3}/2$	$5\pi/12$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$	$\pi/2$	i	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 2px;">$e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$</td> <td style="padding: 2px;">$e^{-i\varphi} = \overline{e^{i\varphi}}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">$e^{i(\varphi+\pi)} = -e^{i\varphi}$</td> <td style="padding: 2px;">$e^{i(\varphi+\pi/2)} = ie^{i\varphi}$</td> </tr> </tbody> </table>	$e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$	$e^{-i\varphi} = \overline{e^{i\varphi}}$	$e^{i(\varphi+\pi)} = -e^{i\varphi}$	$e^{i(\varphi+\pi/2)} = ie^{i\varphi}$
φ	$e^{i\varphi}$																				
0	1																				
$\pi/12$	$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$																				
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2 + i/2$																				
$\pi/4$	$1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$																				
$\pi/3$	$1/2 + i\sqrt{3}/2$																				
$5\pi/12$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$																				
$\pi/2$	i																				
$e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$	$e^{-i\varphi} = \overline{e^{i\varphi}}$																				
$e^{i(\varphi+\pi)} = -e^{i\varphi}$	$e^{i(\varphi+\pi/2)} = ie^{i\varphi}$																				
<p>Für $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Moivre-Formel:</p> $z^n = [re^{i\varphi}]^n = r^n e^{i(n\varphi)}$ <p>Für $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ gilt die Funktionalgleichung:</p> $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}$																					

Aufgabe 1.

Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \in \mathbb{C}$, sowie z^2 und $|z|^2$.

a) $\frac{1-i}{1-2i}z = \frac{2+2i}{1+3i}$ b)* $z = \frac{i+3}{2i-4}$ c)* $z = (2+i)^2 + 7 - 3i$

d)* $z = \frac{(1+2i)[(4+3i)^2 + 1 - 22i]}{(2-i)^2 - 2 + 5i}$ e)* $[\frac{1-i}{2+3i} - \frac{6+2i}{1+i}]z = \frac{3-i}{3+i}$

f)* $[\frac{1-2i}{3+i} + \frac{6-i}{1+5i}]\bar{z} = \frac{3-6i}{1+i}$ g)* $\frac{1}{4} \frac{3-i}{1-2i} \bar{z} = \frac{i-1}{i+\sqrt{3}}$

Lösung: a) $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = -1, |z| = \sqrt{2}, z^2 = -2i, |z|^2 = 2$

b) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}, z^2 = \frac{i}{2}, |z|^2 = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{Re} z = 10, \operatorname{Im} z = 1, |z| = \sqrt{101}, z^2 = 99 + 20i, |z|^2 = 101$

d) $\operatorname{Re} z = 11, \operatorname{Im} z = 7, |z| = \sqrt{170}, z^2 = 72 + 154i, |z|^2 = 170$

e) $\operatorname{Re} z = -\frac{11}{50}, \operatorname{Im} z = \frac{3}{50}, |z| = \frac{\sqrt{130}}{50}, z^2 = \frac{56-33i}{1250}, |z|^2 = \frac{13}{250}$

f) $\operatorname{Re} z = \frac{30}{13}, \operatorname{Im} z = \frac{25}{26}, |z| = \frac{5}{2}, z^2 = \frac{2975+3000i}{676}, |z|^2 = \frac{25}{4}$

g) $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = -\sqrt{3}, |z| = 2, z^2 = -2(1+i\sqrt{3}), |z|^2 = 4$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie z aus den Gleichungen:

a) $2z + 3i\bar{z} - 5z = 5(i-1)$ b)* $\frac{5}{2}z - 3iz + \frac{1}{2}\bar{z} + 2i\bar{z} = 7 + 5i$

c)* $-3z + \bar{z} - 2i\bar{z} = 2i$

Lösung: a) $z = 5/3$ b) $z = -1 + 2i$ c) $z = 1 - i$

Aufgabe 3. Stellen Sie z in Polarkoordinaten dar.

a) $z = \sqrt{3} - i$

b)* $z = 2 + 2i$

c)* $z = 4i$

Lösung: a) $|z| = 2, \arg z = \frac{11\pi}{6}$ b) $|z| = 2\sqrt{2}, \arg z = \frac{\pi}{4}$ c) $|z| = 4, \arg z = \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 4. Bestimmen und skizzieren Sie die durch folgende Bedingungen festgelegten Teilmengen $M \subseteq \mathbb{C}$.

- a) $|z + 1| - \operatorname{Re} z \geq 2$ b)* $(4\operatorname{Re} z)^2 - |z|^4 \geq 0$ c)* $\operatorname{Re} z \leq |z|^2$
d)* $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+i} \leq 0$ e)* $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+i} < 0$ f)* $4z\bar{z} - 4\operatorname{Re}[(2-i)z] + \lambda \geq 0, \lambda = 1, \lambda = 5$
g)* $(2+i)z + (2-i)\bar{z} - 2 = 0$ h)* $z\bar{z} + 2\operatorname{Re}[(1+i)z] - 2 = 0$
i)* $3z^2 - 10z\bar{z} + 3\bar{z}^2 + 16 = 0$ j)* $z^2 - 5z\bar{z} + 2\bar{z}^2 + 8 = 0$
k)* $|\frac{1}{z} - 1| = 2$ l)* $|\frac{1}{z} - 1| = 1$

Lösung: a) Linke Seite der Parabel $x = 1/2(y^2 - 3)$ (incl. Rand)

b) Zwei Kreisscheiben mit Mittelpunkten $c = \pm 2$, Radius $r = 2$ (incl. Rand)

c) Äußeres und Rand einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt $c = \frac{1}{2}$, Radius $r = \frac{1}{2}$

d) Halbebene: $y \leq x - 1$ ohne $z_0 = -i$ e) Kreisscheibe: $c = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $\lambda = 1$: Äußeres und Rand einer Kreisscheibe $c = 1 + \frac{i}{2}, r = 1, \lambda = 5 : \mathbb{C}$

g) Gerade: $y = 2x - 1$ h) Kreis: $c = -1 + i, r = 2$ i) Ellipse: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

j) 4 Punkte: $\pm 2, \pm i,$ k) Kreis: $c = -\frac{1}{3}, r = \frac{2}{3},$ l) Gerade: $x = \frac{1}{2}$

Information: Einige berühmte Griechen

Kleinbuchstaben:

α	alpha	β	beta	γ	gamma	δ	delta
ε	epsilon	ζ	zeta	η	eta	θ	theta
κ	kappa	λ	lambda	μ	my	ν	ny
ξ	xi	π	pi	ρ	rho	σ	sigma
τ	tau	ϕ	phi	χ	chi	ψ	psi
ω	omega						

Großbuchstaben:

Γ	Gamma	Δ	Delta	Θ	Theta	Λ	Lambda
Ξ	Xi	Π	Pi	Σ	Sigma	Φ	Phi
Ψ	Psi	Ω	Omega				